

Dérivation

Taux de variation de f entre a et $a+h$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer le taux de variation de f entre 2 et 3.

$$\frac{f(2+1) - f(2)}{1} = \frac{f(3) - f(2)}{1} = \frac{3^2 - 2^2}{1} = \frac{9 - 4}{1} = 5.$$

2. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 4.

$$\frac{f(1+3) - f(1)}{3} = \frac{f(4) - f(1)}{3} = \frac{4^2 - 1^2}{3} = \frac{16 - 1}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

3. Calculer le taux de variation de f entre 1 et $1+h$.

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2 \times 1 \times h + h^2 - 1}{h} \\ &= \frac{\cancel{1} + 2h + h^2 - \cancel{1}}{h} \end{aligned}$$

$$= \frac{2h + h^2}{h}$$

$$= \frac{\cancel{2h}}{\cancel{h}} + \frac{h^2}{\cancel{h}}$$

$$= 2 + h$$

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3$.

1. Calculer le taux de variation de g entre 2 et 3.

$$\begin{aligned}\frac{g(2+1) - g(2)}{1} &= \frac{g(3) - g(2)}{1} = \frac{(3^2 - 3) - (2^2 - 3)}{1} \\ &= \frac{(9 - 3) - (4 - 3)}{1} = \frac{6 - 1}{1} = 5\end{aligned}$$

2. Calculer le taux de variation de g entre 2 et 4.

$$\begin{aligned}\frac{g(2+2) - g(2)}{2} &= \frac{g(4) - g(2)}{2} = \frac{(4^2 - 3) - (2^2 - 3)}{2} \\ &= \frac{(16 - 3) - (4 - 3)}{2} = \frac{13 - 1}{2} = 12.\end{aligned}$$

3. Calculer le taux de variation de g entre 2 et $2+h$.

$$\frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 3 - (2^2 - 3)}{h}$$

$$= \frac{(2+h)^2 - 3 - 1}{h}$$

$$= \frac{2^2 + 2 \times 2 \times h + h^2 - 4}{h}$$

$$= \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 - \cancel{4}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{4} \cancel{h}}{\cancel{h}} + \frac{h^2}{\cancel{h}}$$

$$= 4 + h$$

• on appelle nombre dérivé de f en a :

$$\lim_{h \rightarrow 0}$$

limite quand $h \rightarrow 0$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

taux d'accroissement

$$f'(a)$$

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 4$.

1. Établir que pour tout réel $h \neq 0$, $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2 + h$.

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 + 4 - (1^2 + 4)}{h} = \frac{(1+h)^2 + 4 - 5}{h} = \frac{1^2 + 2 \times 1 \times h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

2. En déduire que f est dérivable en 1 et préciser la valeur du nombre dérivé de f en 1.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2+0 = 2.$$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$

$$\frac{2h + h^2}{h} = \frac{2h}{h} + \frac{h^2}{h}$$

$$= 2 + h$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x + 1$.

1. Établir que pour tout réel $h \neq 0$, $\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 5 + h$.

.....
.....
.....

2. En déduire que f est dérivable en 3 et préciser la valeur du nombre dérivé de f en 3.

.....

$$\begin{aligned} 1) & \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \frac{((3+h)^2 - (3+h) + 1) - (\overbrace{3^2 - 3 + 1}^7)}{h} \\ &= \frac{(3+h)^2 - 3 - h + 1 - 7}{h} \\ &= \frac{3^2 + 2 \times 3 \times h + h^2 - 3 - h + 1 - 7}{h} \\ &= \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 - \cancel{3} - h + \cancel{1} - \cancel{7}}{h} \end{aligned}$$

$$= \frac{5h + h^2}{h}$$

$$= \frac{\cancel{5h}}{\cancel{h}} + \frac{\cancel{h^2}}{\cancel{h}}$$

$$= 5 + h$$

$$2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

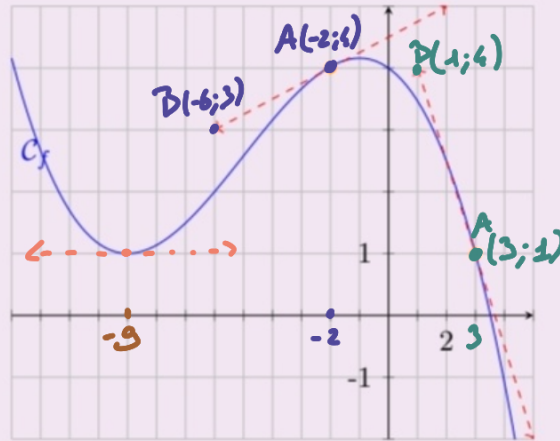
$$= \lim_{h \rightarrow 0} 5 + h$$

$$= 5 + 0 = 5$$

donc f est dérivable en 3
 et son nombre dérivée en 3
 est $f'(3) = 5$

Exercice 1

On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.



$$f'(3) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{-1 - 3} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$f'(-2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 4}{-6 - (-4)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$: $f(3) = 1$ / $f(-2) = 4$ / $f(-9) = 1$
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$: $f'(3) = -\frac{3}{4}$ / $f'(-2) = \frac{1}{2}$ / $f'(-9) = 0$
3. Donner les équations des tangentes correspondantes.

$$T_a f : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$\bullet T_3 f : y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$

$$y = -\frac{3}{4}(x - 3) + 1$$

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \times (-3) + 1$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + 1$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$$

$$\bullet T_{-2} f: y = f'(2)(x - (-2)) + f(-2)$$

$$y = \frac{1}{4}(x + 2) + 4$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \times 2 + 4$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + 4$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$$

$$\bullet T_{-9} f: y = f'(-9)(x - (-9)) + f(-9)$$

$$y = 0 \times (x + 9) + 1$$

$$y = 1$$

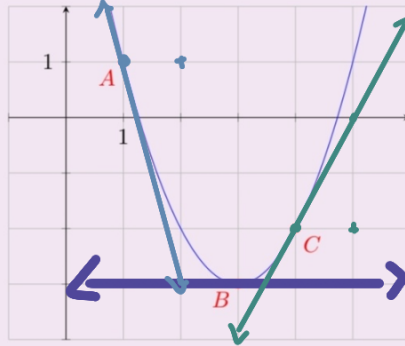
Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable en 1, en 3 et en 4 et telle que :

$$f'(1) = -4; \quad f'(3) = 0; \quad f'(4) = 2.$$

Construire les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points A , B et C et donner les équations réduites de chacune d'elles.



.....

.....

.....

.....

.....

.....