

Suites Numériques

EXERCICE 2

Suite arithmétique et suite géométrique

(5 points)

1) La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

On donne : $u_4 = -4$ et $u_7 = \frac{1}{2}$

a) Déterminer la raison r et le premier terme u_0 .

b) Calculer u_{14}

2) Calculer la somme : $S = 700 + 694 + 688 + \dots + 316 + 310$.

On précisera la formule utilisée.

3) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme v_0 .

On donne : $v_2 = 9$ et $v_6 = 144$.

a) Déterminer la raison q et le premier terme v_0 .

b) Calculer $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{11}$. On précisera la formule utilisée.

1) a)

$$r = \frac{u_p - u_n}{p - n}$$

$$r = \frac{u_4 - u_7}{4 - 7} = \frac{-4 - \frac{1}{2}}{-3}$$

$$= \frac{-\frac{9}{2}}{-3} = \frac{9}{2 \times 3} = \frac{3}{2}$$

$$\cdot u_4 = u_0 + 4 \times \frac{3}{2} = 2$$

$$-4 = u_0 + 6$$

$$-4 - 6 = u_0 \Rightarrow u_0 = -10.$$

$$\textcircled{b} \quad u_{14} = u_0 + 14 \times 5$$

$$= -10 + 14 \times \frac{3}{2} = 7$$

$$= -10 + 7 \times 9$$

$$= -10 + 21$$

$$= 11$$

$$\textcircled{c} \quad S = u_0 + \dots + u_{14}$$

$$= (14+1) \times \left(\frac{u_0 + u_{14}}{2} \right)$$

$$= 15 \times \frac{-10+11}{2}$$

$$= 15 \times \frac{1}{2}$$

$$= 7,5.$$

2) $S = \underbrace{700}_{u_0} + \overset{-6}{\curvearrowright} 694 + \overset{-6}{\curvearrowright} 688 + \dots + 316 \overset{-6}{\curvearrowright} + \underline{310}.$
 $r = -6$ et arithmétique $u?$

$$u_0 = 700$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow 310 &= 700 + n \times -6 \\ -390 &= n \times -6 \end{aligned}$$

$$\frac{-390}{-6} = n$$

$$n = 65.$$

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{65}$$

$$= (65+1) \times \frac{u_0 + u_{65}}{2}$$

$$= 66 \times \frac{700 + 340}{2}$$

$$= 33 \times 1040$$

$$= 33 \ 330.$$

3) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme v_0 .

On donne : $v_2 = 9$ et $v_6 = 144$.

a) Déterminer la raison q et le premier terme v_0 .

b) Calculer $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{11}$. On précisera la formule utilisée.

a)

$$\frac{u_n}{u_p} = q^{n-p}$$

$\{, \quad \underline{\underline{n > p}}$

$$\frac{v_6}{v_2} = q^{6-2} = q^4$$

$$\frac{144}{9} = q^4 \Rightarrow 16 = q^4$$
$$\Rightarrow q = 2$$

$$v_2 = v_0 \times 2^2 \quad / v_n = v_0 \times q^n$$

$$g = v_0 \times 4$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{4}{g}$$

$$\textcircled{b) S' = v_0 + \dots + v_{11} \\ = v_0 \times \frac{1 - q^{11+1}}{1 - q}$$

$$= \frac{4}{g} \times \frac{1 - 2^{12}}{1 - 2} = -1$$

$$= -\frac{4}{g} \times (1 - 2^{12})$$

$$= 1820.$$

Exercice 35 :

On s'intéresse à l'évolution du nombre d'abonnés d'un réseau social dont l'abonnement est payant annuellement.

A la fin 2019, le réseau compte exactement 600 abonnés.

L'administrateur de la plateforme prévoit chaque année que 20 % des anciens abonnés ne se réabonnent.

2000 nouvelles personnes s'abonnent.

On note u_n le nombre d'abonnés sur la plateforme en 2019 + n.

1. Donner la valeur de u_0 , u_1 et u_2 . Interpréter ces valeurs.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

3. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 10\,000$.

a. Calculer v_0 .

b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison q.

c. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

d. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

e. Calculer le nombre d'abonnés en 2050 ?

$$1) \quad u_0 = 600$$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times 0,8 + 2\,000 \\ &= 2\,480 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \times 0,8 + 2\,000 \\ &= 3\,984. \end{aligned}$$

$$2) \quad u_{n+1} = 0,8u_n + 2000$$

$$3) \quad a) \quad v_0 = u_0 - 10000 \\ = -9400$$

$$b) \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 10000 \\ = 0,8u_n + 2000 - 10000 \\ = 0,8u_n - 8000 \\ = 0,8 \left(u_n - \frac{8000}{0,8} \right) \\ = 0,8(u_n - 10000) \\ = 0,8v_n$$

donc (v_n) est géométrique de

raison $0,8$ et de premier terme $v_0 = -9400$.

c) Comme (v_n) est géométrique de raison $0,8$ et de premier terme $v_0 = -9400$, alors :

$$v_n = v_0 \times q^n = -9400 \times 0,8^n.$$

d) $v_n = u_n - 10000$

$$\Leftrightarrow u_n = v_n + 10000$$

donc :

$$u_n = -9400 \times 0,8^n + 10000$$

EXERCICE 4

Suite arithmético-géométrique

(5 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 800 \\ u_{n+1} = 0,6u_n + 400 \end{cases}$$

- 1) a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Pourquoi ?
- 2) On pose $v_n = u_n - 1\,000$.
a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on donnera la raison et le premier terme v_0 .
b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .
c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

1) a) $u_1 = 0,6 \times u_0 + 400 = 880$

$$u_2 = 0,6 \times u_1 + 400 = 928$$

$$u_3 = 0,6 \times u_2 + 400 = 956,8$$

b) • $u_1 - u_0 = 80$

• $u_2 - u_1 = 48$

$\updownarrow \neq$

donc pas arith.

$$\bullet \quad \frac{u_1}{u_0} = 1, 1$$

} $\neq$

$$\bullet \quad \frac{u_2}{u_1} = 1, 05$$

donc pas géo.