

Probabilité

6. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées $1, 2, 3, \dots, N$ où N est un entier naturel non nul.

On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, $\dots$, X_N pour la ville N .

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à 7,14 et la même variance égale à 6,63.

On considère la variable aléatoire $M_N = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$.

a. Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?

b. Calculer l'espérance $E(M_N)$.

c. On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N .

Montrer que $V(M_N) = \frac{6,63}{N}$.

d. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que :

$$P(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95$$

a) M_N est le nombre moyen de donneur universel dans les N villes.

$$E[ax+b] = aE[x] + b$$

$$E[x+y] = E[x] + E[y].$$

$$b) E[\bar{X}_N] = E\left[\frac{X_1 + \dots + X_N}{N}\right]$$

$$= \frac{1}{N} E[X_1 + \dots + X_N]$$

$$= \frac{1}{N} \left(\underbrace{E[X_1] + \dots + E[X_N]}_{N \times 7,14} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \times N \times 7,14 \quad \text{car même expérience}$$

$$= 7,14.$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Si X et Y ind., alors $V(X+Y)$
~~_____~~ $= V(X) + V(Y)$

c) $V(\bar{X}_N) = V\left(\frac{X_1 + \dots + X_N}{N}\right)$

$$= \frac{1}{N^2} V(X_1 + \dots + X_N)$$

or $X_1, \dots, X_N$ sont indépendantes.

donc $V(\bar{X}_N) = \frac{1}{N^2} \underbrace{\left(V(X_1) + \dots + V(X_N) \right)}_{N \times 6,63}$

$$= \frac{1}{N^2} \times \cancel{N} \times 6,63 \quad \text{car même variance}$$

$$= \frac{6,63}{N}$$

d) D'après l'inégalité de
Bienyamé - Tchebychev :

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(|X_N - E[X_N]| > a) \leq \frac{V(X_N)}{a^2}$$

Soit $a > 0$

$$\mathbb{P}(|X_N - 7,14| > a) \leq \frac{6,63}{Na^2}$$

$$\mathbb{P}(7 < X_N < 7,28) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(7 - 7,14 < X_N - 7,14 < 7,28 - 7,14) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(-0,14 < \underbrace{X_N - 7,14}_{\downarrow} < \underbrace{0,14}_{\downarrow}) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(|X_N - 7,14| \leq 0,14) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(|X_N - 7,14| > 0,14) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{P(|\mu_N - 7,14| > 0,14)} \leq 0,05$$

$$\leq \frac{6,63}{N \times 0,14^2}$$

$$\frac{6,63}{N \times 0,0196} \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow 6,63 \leq 0,05 \times 0,0196 \times N$$

$$\Leftrightarrow \frac{6,63}{0,00098} \leq N$$

$$\text{donc } N > 6768,31$$

$$\text{Donc } N = 6766.$$

Partie B

On choisit au hasard une personne venue un week-end au centre multisports. On note T_1 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du samedi, et T_2 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du dimanche.

On admet que :

- T_1 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_1) = 40$ et d'écart-type $\sigma(T_1) = 10$;
- T_2 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_2) = 60$ et d'écart-type $\sigma(T_2) = 16$;
- les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.

$\sigma \Rightarrow V = \sigma^2$

On note T la variable aléatoire donnant le temps total d'attente avant les accès aux activités sportives lors des deux jours, exprimé en minute. Ainsi on a $T = T_1 + T_2$.

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer que la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T est égale à 356.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour une personne choisie au hasard parmi celles venues un week-end au centre multisports, la probabilité que son temps total d'attente T soit strictement compris entre 60 et 140 minutes est supérieure à 0,77.

1)
$$\begin{aligned} E[T] &= E[T_1 + T_2] \\ &= E[T_1] + E[T_2] \\ &= 40 + 60 \\ &= 100 \end{aligned}$$

En moyenne, on attend 100 minutes sur les deux jours.

$$\begin{aligned}
 2) \quad V(T) &= V(T_1 + T_2) \\
 &= \sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} \quad \text{car} \\
 &= 10^2 + 16^2 \quad \begin{array}{l} T_1 \text{ et } T_2 \\ \text{ind.} \end{array} \\
 &= 100 + 256 \\
 &= 356
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad P(60 < T < 140) \\
 &= P(60 - 100 < T - 100 < 140 - 100) \\
 &= P(-40 < T - 100 < 40) \\
 &= P(|T - 100| \leq 40)
 \end{aligned}$$

$$= 1 - P(|T - 100| > 40)$$

or d'après l'inégalité de
Bienymé - Tchebychev on a :

$$P(|T - 100| > 40) \leq \frac{V(T)}{40^2} = \frac{356}{1600} \\ = 0,2225$$

Ainsi :

$$P(60 \leq T \leq 140) = 1 - P(|T - 100| > 40) \\ > 1 - 0,2225 \\ > 0,7775$$