

Devoir - Maïden

exercice 1:

Partie A

$$1) f(x) = \underbrace{\ln(x+1)}_{\ln x - \infty = -\infty} - \frac{x^2}{25}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

donc par composition de limites
 $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty.$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -1} -\frac{x^2}{25} = -\frac{1}{25}$$

donc par somme de Pimite :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$2) f'(x) = 4 \times \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25}$$

$$= \frac{4}{x+1} - \frac{2x}{25}$$

$$= \frac{4 \times 25 - 2x(x+1)}{25(x+1)}$$

$$= \frac{100 - 2x^2 - 2x}{25(x+1)}$$

70 70

3) Sur $]-1; +\infty[$, $25(x+1) > 0$

$$-2x^2 - 2x + 100$$

$$\Delta = 804 > 0$$

$$\begin{array}{c} x_2 \quad x_1 \\ \hline - \quad + \quad - \end{array}$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{804}}{-4} = \frac{\sqrt{201} - 1}{2} \approx 6,59$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{804}}{-4} = \frac{-\sqrt{201} - 1}{2} \approx -7,59$$

x	-1	2	$6,59$	$+\infty$
f'		$+$	$\emptyset$	$-$

donc f est croissante sur $]-1; 6,59]$ et décroissante sur

$$[6,59; +\infty[.$$

Donc en particulier f est strictement croissante sur $[2; 6,5]$.

$$\begin{aligned} 4) \quad \bullet \quad h(2) &= f(2) - 2 \\ &= 4 \ln(3) - \frac{2^2}{25} - 2 \\ &\approx 0,23 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad h(6,5) &= f(6,5) - 6,5 \\ &= 4 \ln(7,5) - \frac{6,5^2}{25} - 6,5 \\ &\approx -0,13 < 0 \end{aligned}$$

• h est continue sur $[2,364 ; 6,5]$

• h est strictement décroissante sur $[2,364 ; 6,5]$

• $h(2,364) \approx 2,265 > 0$

et $h(6,5) \approx -0,13 < 0$

donc d'après le corollaire
du théorème des valeurs intermédiaires
l'équation $h(x) = 0$ admet une
unique solution sur $[2,364 ; 6,5]$

or $h(x) > 0$ sur $[2 ; 2,364]$

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet
une unique solution sur $[2 ; 6,5]$.

5) a) $(1,99, 6)$.

Partie B:

1) Initialisation:

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_1 = 4 \times P_n(3) - \frac{2^2}{25} \\ \approx 4,2$$

$$2 \leq u_0 \leq u_1 < 6,5.$$

Hérédité:

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$$

$$\text{or } u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et}$$

f est strictement croissante sur $[2; 6,5]$, donc :

$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(6,5)$$

$$2,5 < 4,2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6,37 < 6,5$$

$$\text{donc } 2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6,5.$$

2) La suite (u_n) est croissante et est majorée par 6,5, donc la suite converge.

$$3) \cdot f(p) = p$$
$$f(p) - p = 0$$

$$h(p) = c$$

donc $p = 2$ car 2 est l'unique
solution de $h(x) = c$ sur $[2; 6,5]$.