

Worksheet 3.2

exercice 1 :

3) $d: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$

$$f \mapsto f'$$

• Soit $f, g \in \mathbb{R}_3[x]$

$$\begin{aligned} d(f+g) &= (f+g)' = f' + g' \\ &= d(f) + d(g) \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}_3[x]$

$$d(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda d(f)$$

donc d est linéaire

- $\ker(d) = \left\{ f \in \mathbb{R}_3[x] : d(f) = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \right\}$

$$d(f) = 0 \Rightarrow f' = 0$$

$$\Rightarrow f = cte$$

donc $\ker(d) = \{ f(x) = a_0 \}$
 $= \mathbb{R}.$

et d n'est pas injective.

- $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = \dim(\ker(d)) + \text{rk}(d)$

$$4 = 1 + \text{rank}(d)$$

on a $\text{rank}(d) = 3$ et d
n'est pas surjective.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Im}(d) &= \{ d(f) : f \in \mathbb{R}_3[x] \} \\ &= \{ f' : f \in \mathbb{R}_3[x] \} \\ &= \mathbb{R}_2[x] \end{aligned}$$

5) $d : \mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R})$

$$f \mapsto f'$$

• Soit $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} d(f+g) &= (f+g)' = f' + g' \\ &= d(f) + d(g) \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$.

$$d(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda d(f)$$

donc d est linéaire

$$\begin{aligned} \bullet \ker(d) &= \{ f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) : f' = 0 \} \\ &= \{ \text{fonctions constantes} \}. \end{aligned}$$

par ex.

$$\begin{aligned} \bullet \operatorname{Im}(d) &= \{ g \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) : \exists f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \\ &\quad d(f) = g \} \end{aligned}$$

$$= \{ g \in \mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}) : \exists f \in \mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ telle que } f' = g \}$$

$$= \{ g \in \mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ qui admettent une primitive} \}.$$

$$= \mathcal{E}^{\infty}(\mathbb{R})$$

donc d est surjective.

6) $\tilde{c} : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$

$$f \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

• Soit $f, g \in \mathbb{R}_3[X]$

$$i(f+g) = \int_0^x (f+g)(t) dt$$

$$= \int_0^x f(t) + g(t) dt$$

$$= \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt$$

$$= i(f) + i(g).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}$.

$$i(\lambda f) = \int_0^x (\lambda f)(t) dt$$

$$= \int_0^x \lambda f(t) dt$$

$$= \lambda \int_0^x f(t) dt.$$

$$= \lambda i(f). \text{ Donc } i \text{ est linéaire.}$$

$$\bullet \ker(i) = \left\{ f \in \mathbb{R}_3[x] : \int_0^x f(t) dt = 0 \right\}$$

Comme f est continue sur $[0; x]$
 alors $\int_0^x f(t) dt = 0 \Rightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \in \underbrace{[0, x]}_{\checkmark x}$

$$\Rightarrow f = 0$$

donc $\ker(i) = \{0\}$ et i est injective.

$$\bullet \dim(\mathbb{R}_3[x]) = \dim(\ker(i)) + \text{rank}(i)$$

$$4 = 0 + \text{rank}(i)$$

$$\Rightarrow \text{rank}(i) = 4$$

$$\bullet \operatorname{Im}(i) = \left\{ g \in \mathbb{R}_4[x] : \exists f \in \mathbb{R}_3[x] \int_0^x f(t) dt = g \right\}$$

$$= \left\{ g \in \mathbb{R}_4[x] : g(0) = 0 \right\}$$

$$\hookrightarrow g(x) = \cancel{a_0} + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$\text{et } g(0) = a_0 \text{ d'où } g(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$= \operatorname{span} \{ x, x^2, x^3, x^4 \}$$

donc pas surjectif

exercice 2:

1). Soit (x, y, z) et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

$$f((x, y, z) + (x', y', z'))$$

$$= f(x + x', y + y', z + z')$$

$$= (4(x + x') + y + y' - (z + z'), \dots)$$

$$= \dots$$

$$= f(x, y, z) + f(x', y', z')$$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(\lambda(x, y, z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$= \dots$$

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$\mathcal{B}(e_1) \quad \mathcal{B}(e_2) \quad \mathcal{B}(e_3)$
 $= (4, 2, 2) \quad (1, 3, 1) \quad (-1, -1, 1)$

2) $P_{\mathcal{B}}(\lambda) = \det(M_{\mathcal{B}} - \lambda I_3)$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \dots$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 2)^2$$

on peut prendre $\lambda = 4$ et $\mu = 2$.

3). $E_4 = \ker(\pi - 4I_3)$

$$= \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Span} \{ (1, 1, 1) \}.$$

• $E_2 = \ker(\pi - 2I_3)$

$$= \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2x + y - z = 0$$

$$y = -2x + 2$$

$$E_2 = \text{Span} \left\{ \underbrace{(1; -2; 0)}_x, \underbrace{(0, 1, 1)}_z \right\}$$

donc $\dim E_1 + \dim E_2 = 3$
et valeurs propres distinctes.

$$\text{Donc } E = \ker(f - 4 \text{id}_E) \oplus \ker(f - 2 \text{id}_E)$$

$$4) \mathcal{B}' = \{(1, 1, 1); (1, -2, 0); (0, 1, 1)\}$$

$$\pi_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$