

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.

Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7% des habitants sont infectés par cette maladie.

Parmi les individus infectés, 20% sont déclarés négatifs.

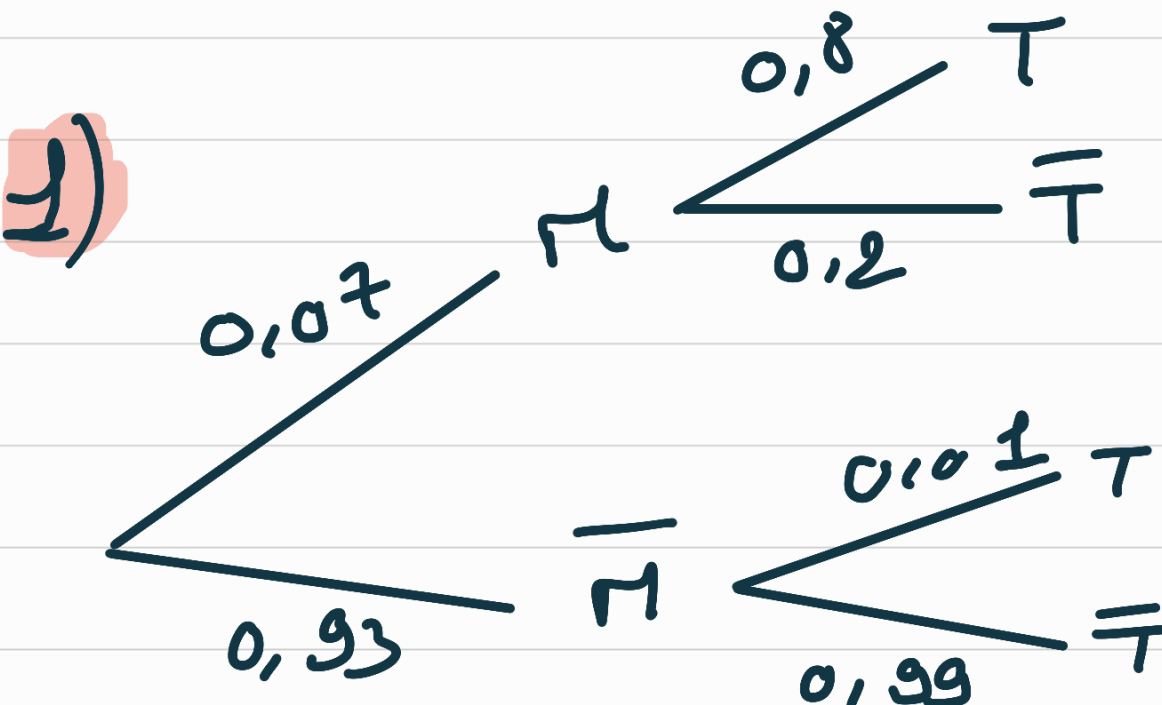
Parmi les individus sains, 1% sont déclarés positifs.

Une personne est choisie au hasard dans la population.

On note :

- M l'évènement "la personne est infectée par la maladie" ;
- T l'évènement "le test est positif".

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. a. Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif?
b. Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0.0653.
3. On sait que le test de la personne choisie est positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
4. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.
a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif soit supérieure à 99%.



$$2) \quad a) \quad \mathbb{P}(H \cap T) = 0,07 \times 0,8$$

$$= 0,056.$$

donc ...

b) D'après la formule des probabilités totales:

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(H \cap T) + \mathbb{P}(\bar{H} \cap T)$$

$$= 0,056 + 0,93 \times 0,01$$

$$= 0,0653.$$

$$3) \quad \mathbb{P}_T(H) = \frac{\mathbb{P}(H \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{0,056}{0,0653}$$

$$\approx 0,86$$

4) a) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; 0,0653)$.

b) $\mathbb{P}(X=2) = \binom{10}{2} (0,0653)^2 (1-0,0653)^8$
 $\approx 0,11$

done ...

5) $\mathbb{P}(X \geq 1) \geq 0,99$

$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(X=0) \geq 0,99$

$\Leftrightarrow -\mathbb{P}(X=0) \geq 0,99 - 1$

$\Leftrightarrow -\mathbb{P}(X=0) \geq -0,01$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X=0) \leq 0,01$

$$P(X=0) = (1-p)^n$$

$$(1 - 0,0653)^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow 0,9347^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow P_n(0,9347) \leq P_n(0,01)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{P_n(0,01)}{P_n(0,9347)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 68,19$$

donc il faut au minimum 69.

Exercice 2

5 points

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k .

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1.9$ et $u_0 = 0.1$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1.9u_n(1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1.9x(1 - x)$.

a. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, 1]$.

b. En déduire que si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 1]$.

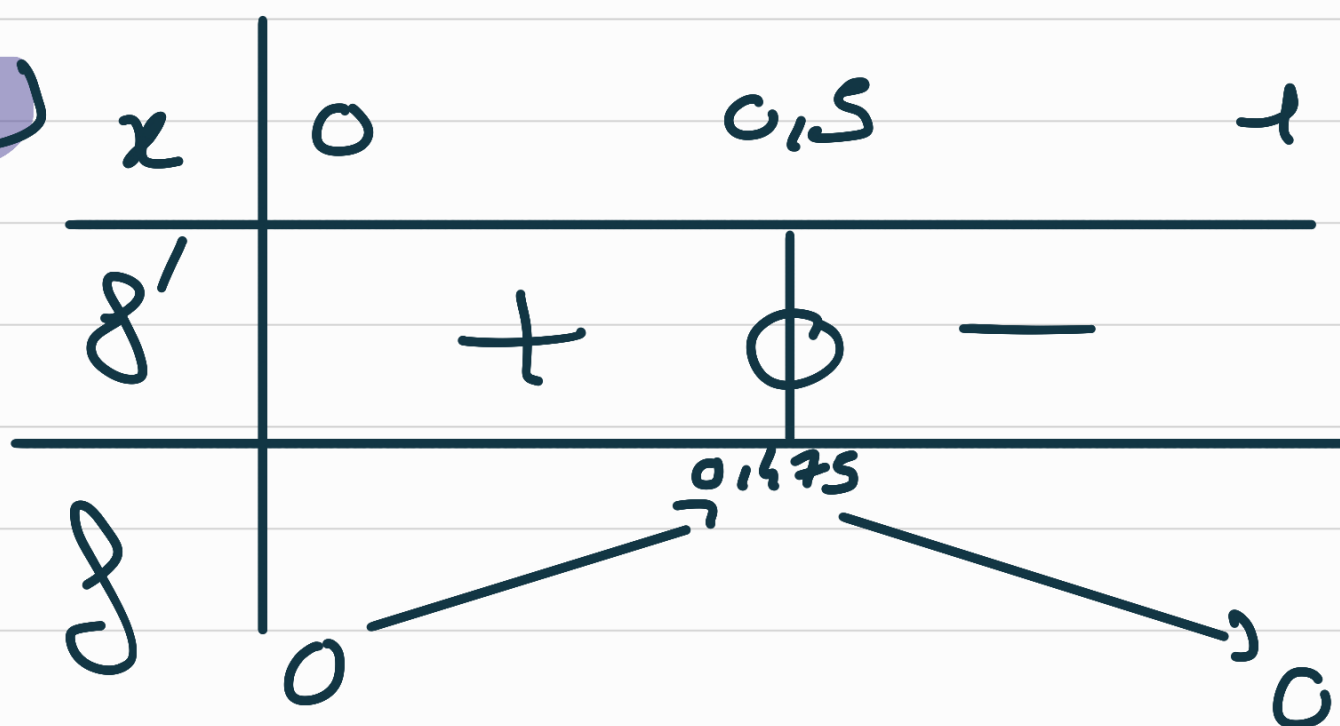
2. En annexe sont représentées la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite D d'équation $y = x$.

Tracer sur le schéma les cinq premiers termes de la suite (u_n) , et conjecturer le sens de variation de la suite ainsi que sa limite éventuelle.

3. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

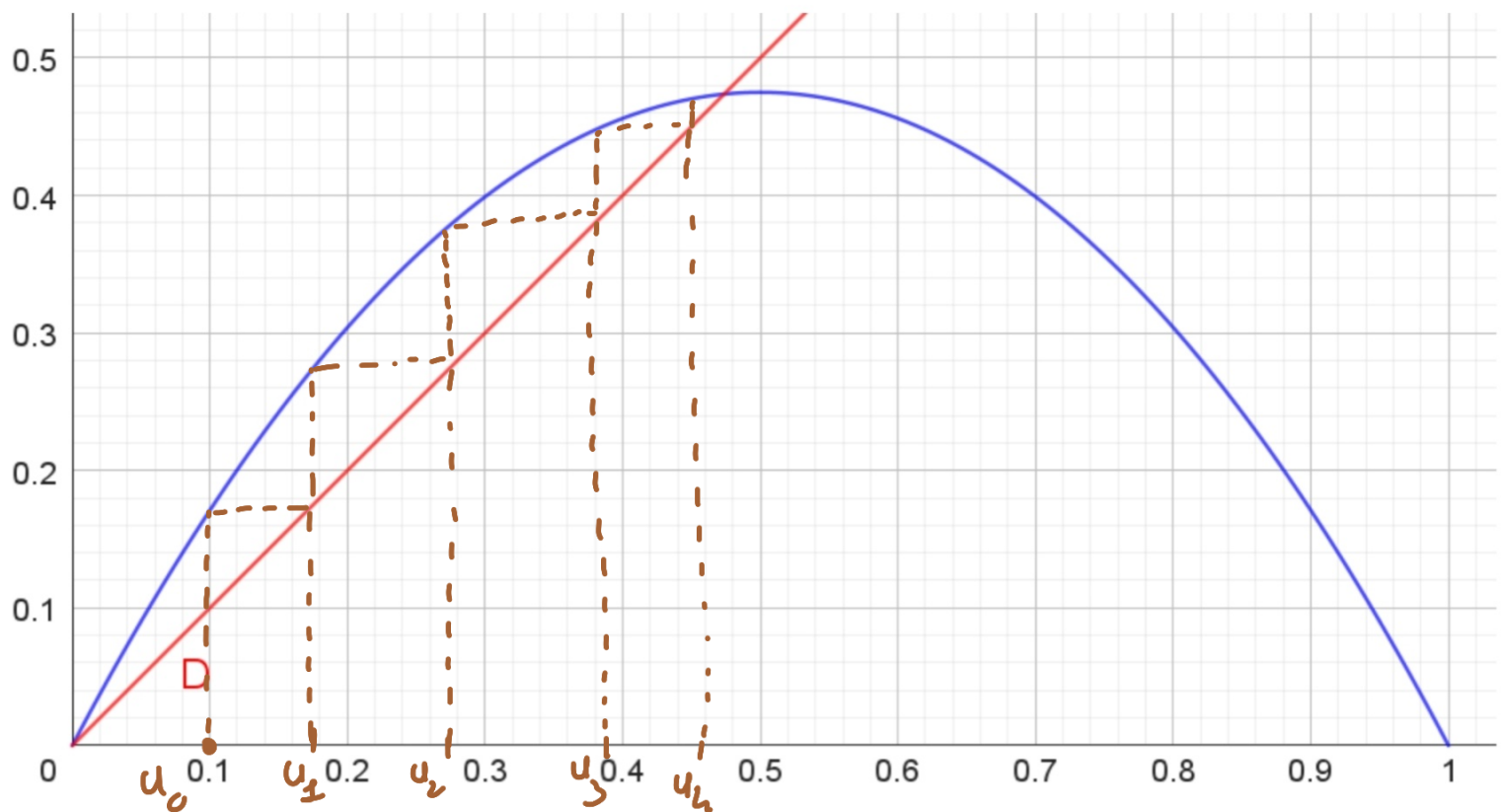
b. En déduire que la suite (u_n) converge.



3) f admet pour minimum 0 et pour maximum $0,475 < 1$.

Donc pour $x \in [0; 1]$, on a $f(x) \in [0; 1]$.

Exercice 2 : $f(x) = 1.9x(1-x)$ et $(D) y = x$



Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère la fonction Python algo(p) où p désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :  
    u = 1/4  
    n = 0  
    while u > 10**(-p):  
        u = 1/2*u*(1 - u)  
        n = n+1  
    return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p , la boucle while ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande algo(p) de renvoyer une valeur.

1) on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

et de plus, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

donc par le théorème d'encadrement, la suite (u_n) converge vers 0.

2) comme $p \in \mathbb{N}^+$, alors
 $10^{-p} < 0,1$.

et comme (u_n) tend vers 0
alors la boucle white va
s'arrêter au bout d'un
certain rang.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2; -1; 0), B(3; -1; 2), C(0; 4; 1) \text{ et } S(0; 1; 4)$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .
2.
 - a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC) .
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S . Elle coupe le plan (ABC) en H .
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) .
 - b. Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2; 2; 3)$.
4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.
5.
 - a. Calculer la longueur SA .
 - b. On indique que $SB = \sqrt{17}$.
En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.