

exercice 4:

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 - 1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} dt.$$

1)
 $t \mapsto \frac{t^2 - 1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}$ est continue
sur $[0; +\infty[$.

en $+\infty$:

$$\frac{t^2 - 1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^2 \times \sqrt{t^4}} = \frac{1}{t^2}$$

or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable

sur $[1; +\infty[$ par Riemann
et donc par comparaison.

$t \mapsto \frac{t^2 - 1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}$ est intégrable
en $+\infty$.

Donc I_0 converge.

2) on pose $T = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{T}$

$$dt = -\frac{dT}{T^2}$$

$$I_1 = \int_1^0 \frac{\frac{1}{T^2} - 1}{\left(1 + \frac{1}{T^2}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{T^4}}} \times -\frac{dT}{T^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{1 - T^2}{T^2}}{\frac{T^2 + 1}{T^2} \sqrt{\frac{T^2 + 1}{T^4}}} \times \frac{1}{T^2} dT$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{1-T^2}{T^2}}{\frac{T^2+1}{T^2} \times \frac{\sqrt{T^2+1}}{T^2}} \times \frac{1}{T^2} dT$$

$$= \int_0^1 \frac{1-T^2}{\cancel{T^2}} \times \frac{\cancel{T^3}}{(T^2+1)\sqrt{T^2+1}} \times \frac{1}{\cancel{T^2}} dT$$

$$= \int_0^1 \frac{1-T^2}{(T^2+1)\sqrt{T^2+1}} dT$$

$$= - \int_0^1 \frac{T^2-1}{(T^2+1)\sqrt{T^2+1}} dT$$

check $I_1 = - \int_0^1 \cdot dt$

$D'_{cr} :$

$$I_c = \int_0^1 \bullet dt + \int_1^{+\infty} \bullet dt$$

$$= -I_1 + I_1$$

$$= 0.$$

exercice 3 :

$$I = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{t^\alpha} dt, \quad \alpha < 1$$

La fonction $t \mapsto \frac{P_n(t)}{t^\alpha}$ est continue sur $]0; 1]$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad I_A &= \left[P_n(t) \times \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_A^1 \\ &\quad - \int_A^1 \frac{1}{t} \times \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{P_n(1)}{1^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} \int_A^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$$

$$\text{or } 2 < 1 \Rightarrow 2-1 < 0$$

donc par croissance comparée

$$\frac{\ln(A)}{A^{2-1}} = A^{1-2} \ln(A)$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow 0} 0$$

$$\text{et } \int_A^1 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{2-1} \times \frac{1}{t^{2-1}} \right]_A^1$$

$$= -\frac{1}{2-1} + \frac{1}{2-1} \times \frac{1}{A^{2-1}}$$

$$= -\frac{1}{2-1} + \frac{1}{2-1} \times A^{1-2}$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow 0} -\frac{1}{2-1}.$$

donc $I_A \xrightarrow{A \rightarrow 0} -\frac{1}{(2-1)^2}$.

Donc I est convergente.

et par $\alpha = \frac{1}{2}$, on a

$$I = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = -4$$

exercice 4:

$$S_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}} P_n \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right).$$

$$P_n \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$\begin{matrix} 0 & \leftarrow & & & \rightarrow & 0 \end{matrix}$

d'après :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n}} \times P_n \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

or $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ cv par le

critère des séries alternées

car $\frac{1}{n} \searrow 0$.

et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ cv par Riemann

Donc S_4 converge comme
somme de trois séries convergents.

exercice 5 :

$$S(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

1) on pose $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\cancel{(-1)^{n+1}} x^{\cancel{2n+2}}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{\cancel{(-1)^n} \cancel{x^{2n}}} \right|$$

$$= |x|^2 \times \frac{\cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}$$

$$= \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques,

$\sum a_n$ CV pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc $R = +\infty$.

exemple:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e|x|^2$$

$$\bullet e|x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < e^{-1/2}$$

$\hookrightarrow$ CV

$$\bullet e|x|^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > e^{-1/2}$$

$\hookrightarrow$ DV

$$\Rightarrow R = e^{-1/2}.$$

$$2) S(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \cos(x)$$

$$\text{donc } S(10) = \cos(10).$$

Worksheet 2.

exercice 2 :

3) $\sum_{n \geq 3} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$

• $\frac{2n-1}{n(n^2-4)} \underset{+ \infty}{\sim} \frac{2n}{n \times n^2} = \frac{2}{n^2}$

$\propto \sum \frac{1}{n^2}$ cv par Riemann et

donc $\sum \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ cv.

or pose :

$$S_N = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}.$$

$$\text{or } \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{2n-1}{n(n-2)(n+2)}$$

$$= \frac{a}{n} + \frac{b}{n-2} + \frac{c}{n+2}$$

$$a = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2n-1}{(n-2)(n+2)} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$b = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{2n-1}{n(n+2)} = \frac{3}{2 \times 4} = \frac{3}{8}$$

$$c = \lim_{n \rightarrow -2} \frac{2n-1}{n(n-2)} = \frac{-5}{-2 \times -4} = -\frac{5}{8}$$

cbnc :

$$S_N = \sum_{n=3}^N \frac{1}{4n} + \frac{3}{8(n-2)} - \frac{5}{8(n+2)}$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{n=3}^N \frac{1}{n} + \frac{3}{8} \sum_{n=3}^N \frac{1}{n-2} - \frac{5}{8} \sum_{n=3}^N \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=3}^N \frac{1}{n} + \frac{3}{8} \sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n} - \frac{5}{8} \sum_{n=5}^{N+2} \frac{1}{n}$$

on pose $H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$

$$= \frac{1}{4} (H_N - H_2) + \frac{3}{8} H_{N-2} - \frac{5}{8} (H_{N+2} - H_4)$$

$$= \left(\frac{1}{4} H_N + \frac{3}{8} H_{N-2} - \frac{5}{8} H_{N+2} \right) + \left(-\frac{1}{4} H_2 + \frac{5}{8} H_4 \right)$$

$$= \left(\cancel{\frac{1}{4} H_N} + \cancel{\frac{3}{8} H_N} - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \right) - \frac{5}{8} H_N - \frac{5}{8} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right) + \left(\frac{5}{8} H_4 - \frac{1}{4} H_2 \right)$$

$$= -\frac{3}{8} \frac{1}{n} - \frac{3}{8} \frac{1}{n-1} - \frac{5}{8} \frac{1}{n+1} - \frac{5}{8} \frac{1}{n+2} + \frac{5}{8} H_4 - \frac{1}{4} H_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{8} H_4 - \frac{1}{4} H_2$$

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Done

$$S_N \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{8} \times \frac{25}{12} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{89}{96}.$$

Done $\sum_{n=3,5} \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{89}{96}.$