exercice :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ell .$

Initialisation : $u_0 = 1$

$u_1 = \sqrt{u_0 + 1}$
$= \sqrt{1+1}$
$= \sqrt{2}$

$0 \leq 1 \leq \sqrt{2} \leq 2$

Hérédité :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

$$0+1 \leq u_n+1 \leq u_{n+1}+1 \leq 2+1$$

$$1 \leq u_n+1 \leq u_{n+1}+1 \leq 3$$

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{u_n+1} \leq \sqrt{u_{n+1}+1} \leq \sqrt{3}$$

$$0 \leq 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \sqrt{3} \leq 2$$

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$f \nearrow$ sur $\mathbb{R}$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n > 0$.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire la convergence de la suite (u_n).

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

5. **a.** Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où h est un nombre réel strictement positif.

Python

```python
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
    n = 0
    u = 7
    while ... :
        n = n+1
        u = ...
    return n
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit $\text{seuil}(0.01)$ dans la console Python. Justifier la réponse.

1) **Hérédité** :

$$u_n > 0$$

or $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f(u_n) > f(0) = 0$$

$u_{n+1} > 0$ ✓

2) $u_{n+1} - u_n$

$= \cancel{u_n} - \ln(u_n^2 + 1) - \cancel{u_n}$

$= \underbrace{-\ln(\underbrace{u_n^2 + 1}_{>1})}_{>0}$

< 0 , car $u_n^2 + 1 > 1$, et
$\ln(u_n^2+1) > 0$

donc (u_n) est décroissante.

3) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

4) La suite (u_n) est convergente et la fonction f est continue, donc la limite ℓ vérifie :

$$f(\ell) = \ell.$$

$$\iff \cancel{\ell} - \ln(\ell^2 + 1) = \cancel{\ell}$$

$$\iff -\ln(\ell^2 + 1) = 0$$

$$\iff \ln(\ell^2 + 1) = 0$$

$$\iff \ell^2 + \cancel{1} = \cancel{1}$$

$$\iff \ell^2 = 0 \implies \ell = 0$$

Exercice 3 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(3; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$ et $C(-2; -5; 1)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

3. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

$$-x + y - 2z + 5 = 0$$

4. On considère le point $S(1; -2; 4)$.
   Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ), passant par S et $\underbrace{\text{orthogonale au plan } (ABC)}$.

$\vec{n}$ directeur de la droite

5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
   Montrer que les coordonnées de H sont $(0; -1; 2)$.

6. Calculer la valeur exacte de la distance SH.

7. On considère le cercle $\mathcal{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathcal{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathcal{C}$.
   Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathcal{D}$.

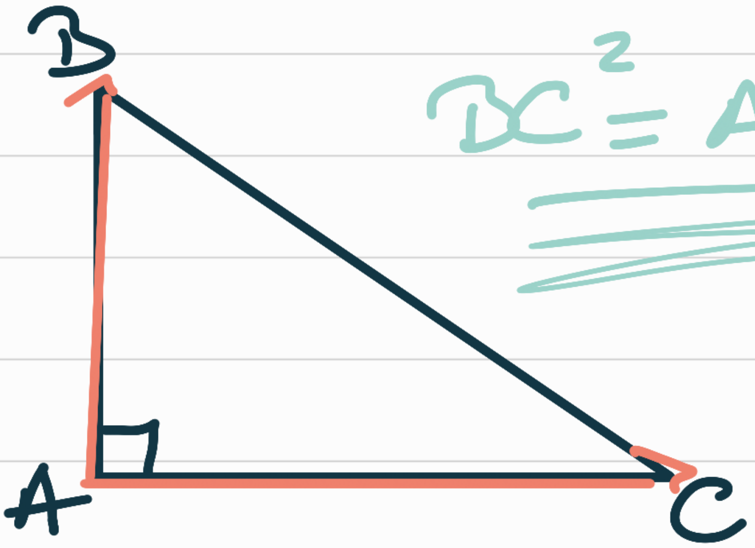
8. En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathcal{D}$.

1) $\vec{AB}(-1 ; 1 ; 1)$

$\vec{AC}(-5 ; -5 ; 0)$.

comme la coordonnée nulle n'est pas à la même position pour les deux vecteurs alors les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, et donc les points A, B, C ne sont pas alignés.

2)



$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -1 \times -5 + 1 \times -5 + 1 \times 0$$

$$= 5 - 5 + 0 = 0$$

donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est rectangle en A.

3) on pose $\vec{n}(-1; 1; -2)$.

Montrer que $\vec{n}$ est normal au plan.

$\vec{AB} \cdot \vec{n} = -1 \times -1 + 1 \times 1 + 1 \times -2$
$= 1 + 1 - 2 = 0$

$\vec{AC} \cdot \vec{n} = -5 \times -1 + -5 \times 1 + 0 \times -2$
$= 5 - 5 + 0 = 0$

donc $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, donc $\vec{n}$ est normal au plan.

$-x + y - 2z + 5 = 0$

- $A(3; 0; 1)$

$\hookrightarrow -3 + 0 - 2 \times 1 + 5 = 5 - 5 = 0$ ✓

- $B(2; 1; 2)$

$\hookrightarrow -2 + 1 - 2 \times 2 + 5$
$= -2 + 1 - 4 + 5 = 0$ ✓

• $C(-2; -5; 1)$

$\hookrightarrow -(-2)+(-5)-2\times 1+5$

$= 2-5-2+5 = 0$ ✓

donc $-x+y-2z+5=0$

est une équation du plan (ABC).

• équation cartésienne de plan : vecteur normal + point

• équation paramétrique de droite : vecteur directeur + point.

4) Comme la droite (Δ) est ortho. au plan, alors $\vec{n}$ est directeur et une équation paramétrique est :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 - t \rightarrow x_S + x_n t \\ y = -2 + t \rightarrow y_0 + y_n t \; ; \; \underline{\underline{t \in \mathbb{R}}} \\ z = 4 - 2t \rightarrow z_S + z_n t. \end{cases}$$