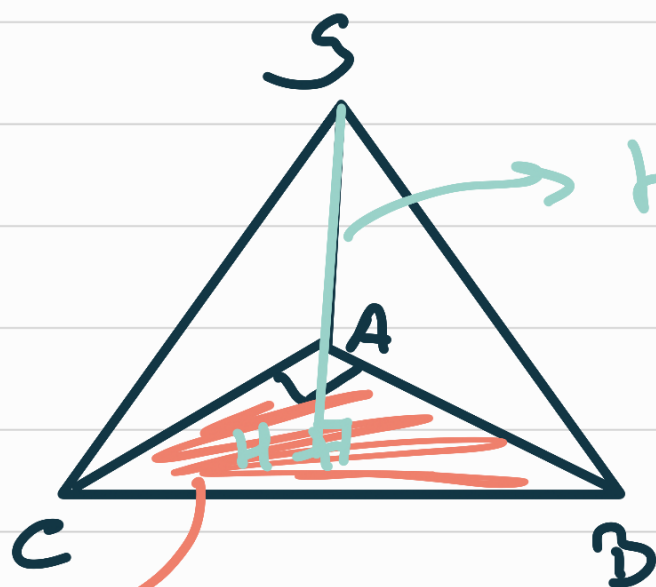


Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2; -1; 0), B(3; -1; 2), C(0; 4; 1) \text{ et } S(0; 1; 4)$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .
2.
 - a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC) .
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S . Elle coupe le plan (ABC) en H .
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) .
 - b. Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2; 2; 3)$.
4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.
5.
 - a. Calculer la longueur SA .
 - b. On indique que $SB = \sqrt{17}$.
En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.



hauteur: SH

$$\text{aire}(ABC) = \frac{AB \times AC}{2}$$

$$V = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{50} \times \sqrt{6}}{3}$$

= 5 unidades de volume.

$$\begin{aligned} SH &= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \text{ a) } SA &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2} \\ &= 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

$$b) \vec{SA} \cdot \vec{SB} = 2 \times 3 + (-2) \times (-2) + (-4) \times (-2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{SA}(2; -2; -4) \\ \vec{SB}(3; -2; -2) \end{array}} \quad \begin{array}{l} = 6 + 4 + 8 \\ = 18 \end{array}$$

$$\rightarrow \vec{SA} \cdot \vec{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB})$$

$$18 = 2\sqrt{6} \times \sqrt{17} \times \cos(\widehat{ASB})$$

$$\text{donc } \cos(\widehat{ASB}) = \frac{18}{2\sqrt{6} \times \sqrt{17}}$$

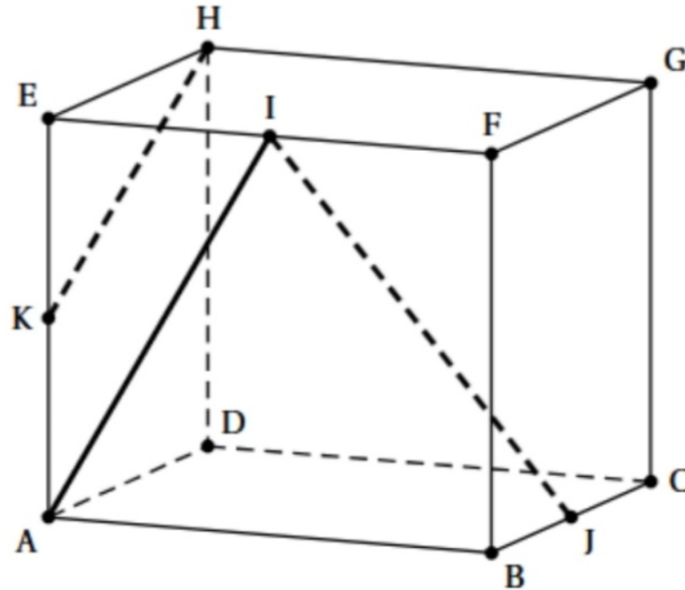
$$= \frac{3\sqrt{102}}{34}$$

$$\text{et } \widehat{ASB} = \arccos\left(\frac{3\sqrt{102}}{34}\right) \approx 27^\circ$$

Exercice 3

5 points

On considère un cube $ABCDEFGH$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$, le point J est le milieu du segment $[BC]$, et le point K est le milieu du segment $[AE]$.



Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles? Justifier votre réponse.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 4 + t' \\ y = 1 + t' \\ z = 8 + 2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

3. Quelle est la position relative des droites (d_1) et (d_2) dans l'espace? Justifier.
4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
5. Montrer que le point $L(4; 0; 3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5; 3; 1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

5). $x + 3y - 2z + 2 = 0$

$$\begin{aligned} L, & \quad 4 + 3 \times 0 - 2 \times 3 + 2 \\ & = 4 - 6 + 2 = 0 \end{aligned}$$

donc $L(4; 0; 3) \in (\mathcal{P})$.

$$\vec{Lr1}(1; 3; -2)$$

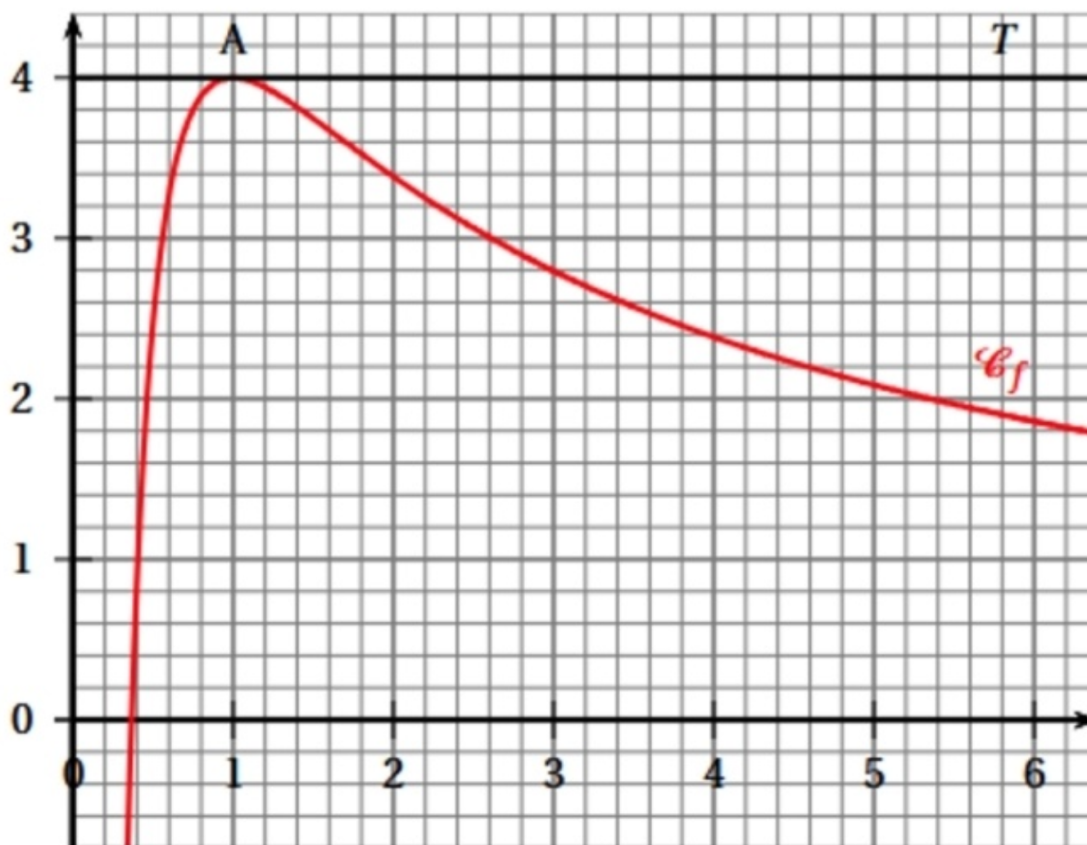
$$\propto \vec{n}(1; 3; -2)$$

donc $\vec{n}$ et $\vec{Lr1}$ sont colinéaires
et donc $(Lr1)$ orthogonale au
plan (P) .

Exercice 4**5 points**

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f , deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point $A(1; 4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b \ln x}{x^2}$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b .

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4 \ln x}{x}$$

4. On admet que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$,

déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

5. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3}$$

6. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

$$1) f(1) = 2$$

• $f'(1) = 0$, car la tangente est horizontale.

$$2) f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b \ln(x)) \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{b - a - b \ln(x)}{x^2}.$$

$$3) f(1) = \frac{a + b \ln(1)}{1} = a$$

$$f'(1) = \frac{b - a - b \ln(1)}{1^2} = b - a$$

$$\text{or } f(1) = 2$$

$$f'(1) = 0$$

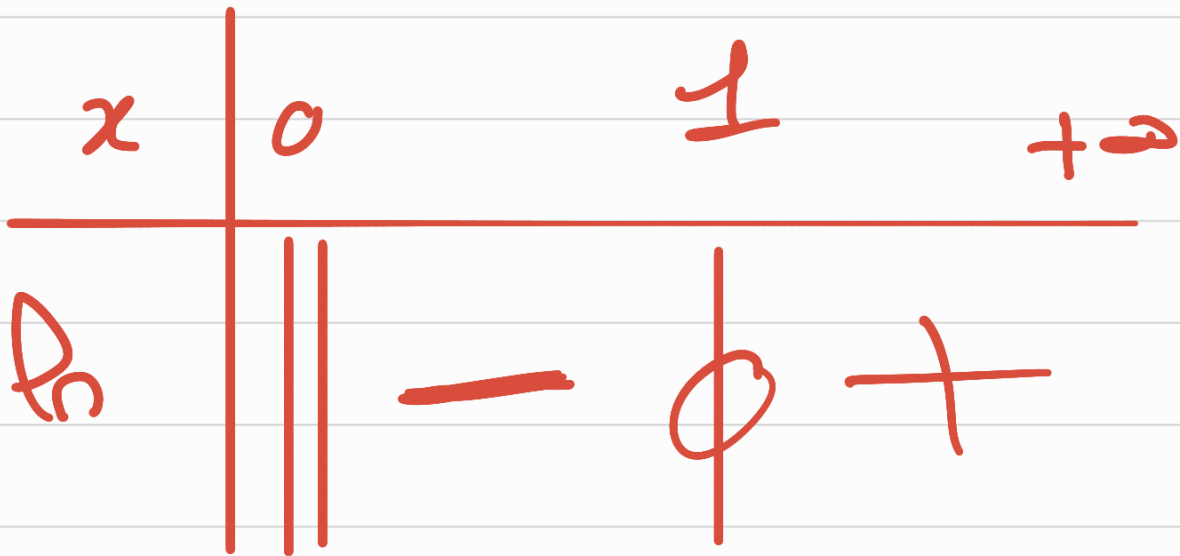
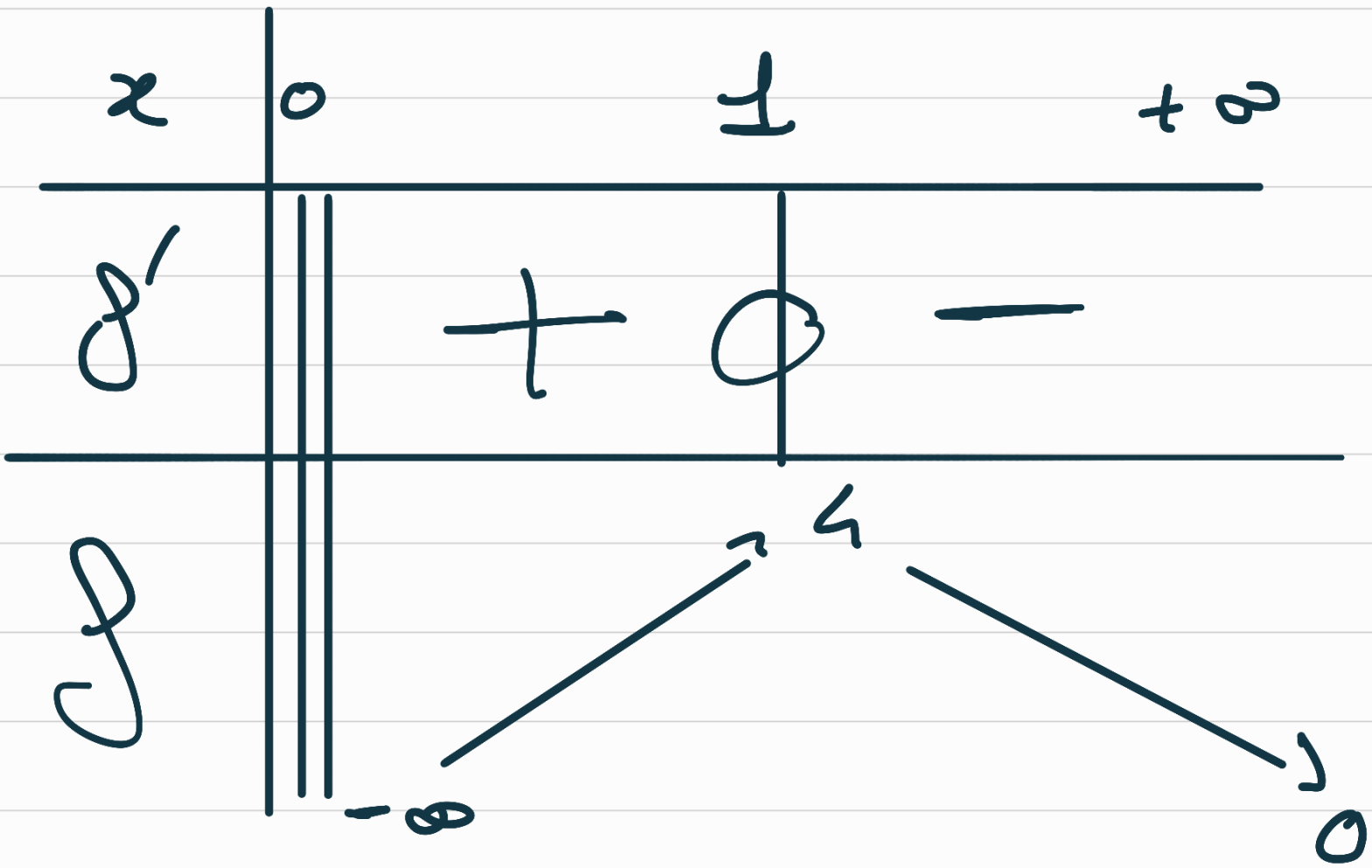
$$\text{d'où } \begin{cases} a = 4 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow b - 4 = 0 \\ \Rightarrow b = 4$$

$$\text{donc } a = 4 \text{ et } b = 4.$$

$$4) \quad f'(x) = \frac{-4 \ln(x)}{x^2}$$

$$\text{or } -4 \ln(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{0}{-4} = 0.$$



$$6) -4 + 8A_n(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow A_n(x) = \frac{4}{8}$$

$$\Leftrightarrow A_n(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{1/2}$$

donc $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion $\mathcal{D}$ de coordonnées $(e^{1/2}; 6e^{-1/2})$.

$$f(e^{1/2}) = \frac{4 + 4A_n(e^{1/2})}{e^{1/2}}$$

$$= (4 + 4 \times \frac{1}{2}) e^{-1/2} = 6e^{-1/2}$$