

Exercice 3

5 points

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2; -1; 0), B(3; -1; 2), C(0; 4; 1) \text{ et } S(0; 1; 4)$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .
2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC) .
 b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S . Elle coupe le plan (ABC) en H .
 a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) .
 b. Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2; 2; 3)$.
4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
 Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.
5. a. Calculer la longueur SA .
 b. On indique que $SB = \sqrt{17}$.
 En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

$$4) AB = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{30}$$

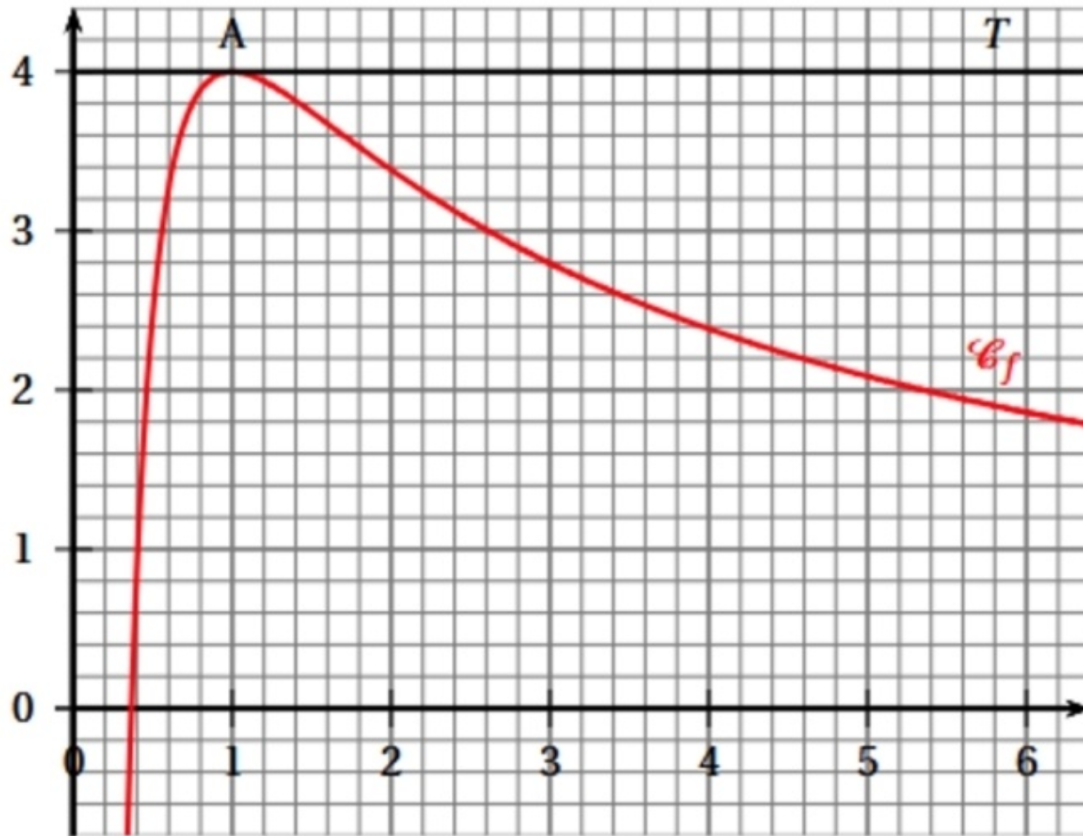
$$\text{aire base} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{30}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$V = \frac{\frac{5\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{6}}{3} = 6 \text{ unités de volume.}$$

Exercice 4**5 points**

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f , deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point $A(1; 4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b \ln x}{x^2}$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b .

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4 \ln x}{x}$$

4. On admet que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$,

déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

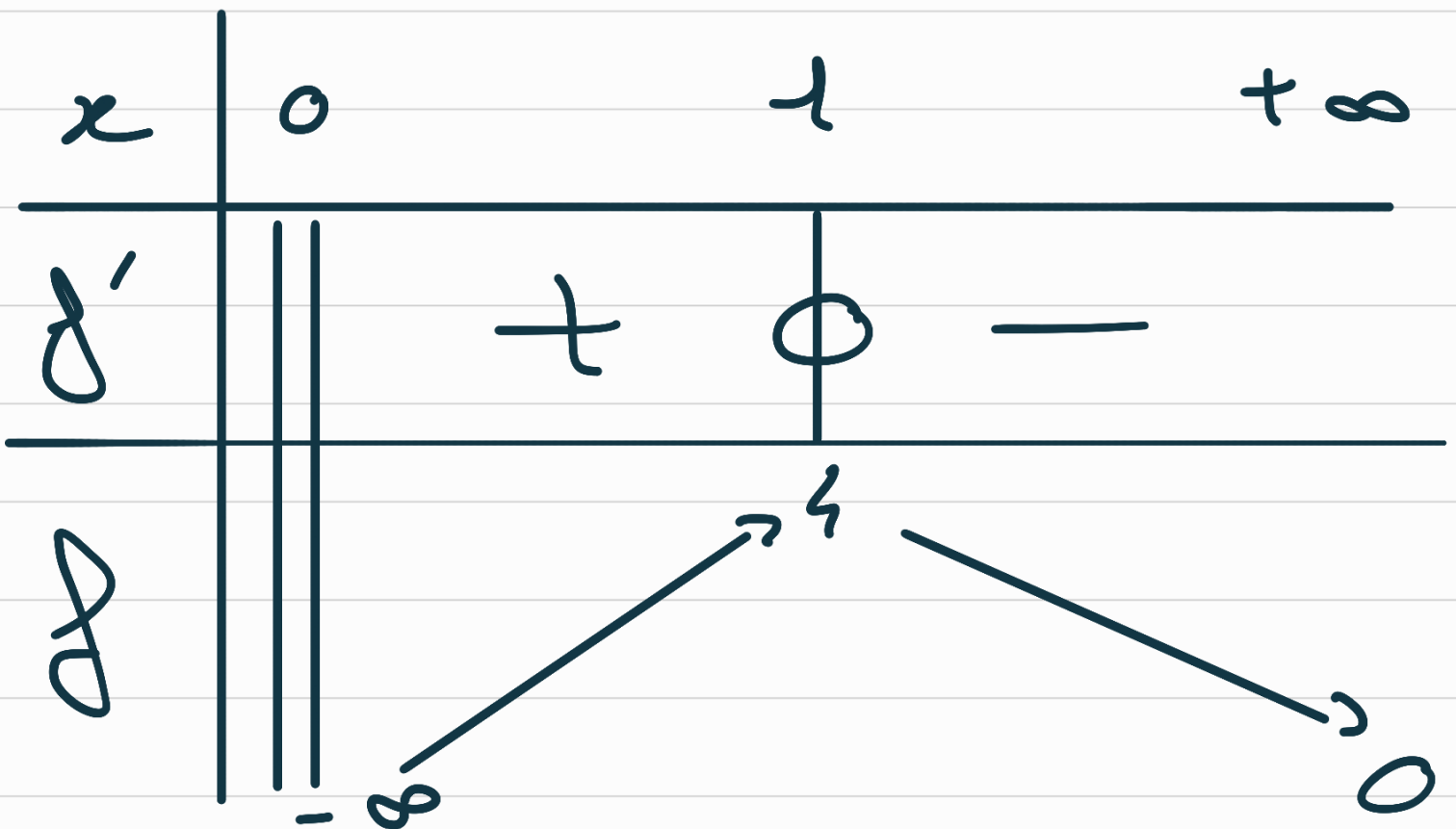
5. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3}$$

6. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

$$4) -4 \Delta_n(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta_n(x) \leq \frac{0}{-4} = 0$$



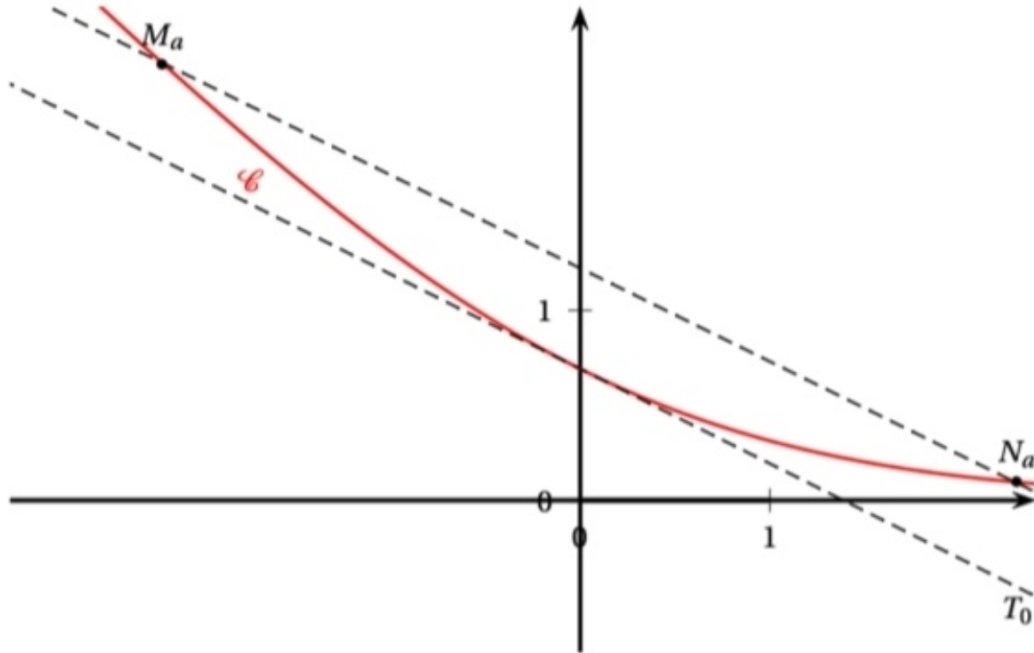
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous.



1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$.
2. En déduire le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, et établir son tableau de variations complet sur $\mathbb{R}$.
On admettra que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
3. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
 - a. Déterminer une équation de la tangente T_0 .
 - b. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
 - c. En déduire que, pour tout nombre réel x , on a :

$$f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$$

4. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a .

On a donc : $M_a(-a; f(-a))$ et $N_a(a; f(a))$.

- a. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a : $f(x) - f(-x) = -x$.
- b. En déduire que les droites T_0 et $(M_a N_a)$ sont parallèles.

$$4) a) f(x) - f(-x)$$

$$= \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^x)$$

$$= \ln\left(\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^{-x}(e^x + 1)}{1 + e^x}\right)$$

$$= \ln(e^{-x})$$

$$= -x.$$

5) deux droites si les coefficients directeur sont égaux.

$$T_0 \rightarrow -\frac{1}{2}$$

$$(M_A N_A) \rightarrow \frac{y_{N_A} - y_{M_A}}{x_{N_A} - x_{M_A}}$$

$$= \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)}$$

$$= \frac{-\cancel{a}}{2\cancel{a}} = -\frac{1}{2}.$$