

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

exercice 1:

$$A \cap B \cap C = \{1, \dots, 6\} \times \{5\}$$

$$C = \{3; 6; 5; 4\}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36}$$

$$P(A) = \frac{18}{36} \overset{6 \times 3}{=} \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\cdot P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$C = \{(3; 6), (6; 3), (4; 5), (5; 4)\}$$

$$\begin{aligned} \cdot P(A) \times P(B) \times P(C) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot P(A \cap B) &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &\neq P(A)P(B) \end{aligned}$$

donc A et B pas indépendants.

$$\begin{aligned} \cdot P(B \cap C) &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} \\ &\neq P(B) \times P(C) \end{aligned}$$

donc B et C pas indépendants.

$$\begin{aligned} P(A \cap C) &= \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} \\ &\neq P(A) \times P(C) \end{aligned}$$

donc A et C pas indépendants.

exercice 2 :

Montrer $P(A \cap (B \cup C)) = P(A)P(B \cup C)$

$$, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

donc $P(A \cap (B \cup C))$

$$= P((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

$$\begin{aligned}
&= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\
&= P(A)(P(B) + P(C) - P(B)P(C)) \\
&= P(A)(P(B) + P(C) - P(B \cap C)) \\
&= P(A)P(B \cup C).
\end{aligned}$$

donc A et $(B \cup C)$ sont indépendants.

exercice 3:

$$1) A \cap B = \{6; 12\}$$

$$\text{donc } P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$$

$$\text{donc } P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{3; 6; 9; 12\}$$

$$\text{donc } P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$$

et A et B sont indépendants.

$$2) P(A \cap B) = \frac{2}{13}$$

$$P(A) = \frac{6}{13} \quad P(B) = \frac{4}{13}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{6}{13} \times \frac{4}{13} = \frac{24}{169}$$

$$\neq \frac{2}{13} = P(A \cap B)$$

donc A et B pas indépendants.

exercice 4:

Supposons par l'absurde que
l'on ait A et B indépendants.

On note $|S| = p$, premier

• A et B non triviaux

$$1 \leq |A| \leq p-1$$

$$1 \leq |B| \leq p-1$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{|A|}{p}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|S|} = \frac{|B|}{p}$$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|S|} = \frac{|A \cap B|}{p}$$

Comme A et B sont indep.
on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B).$$

$$\frac{|A \cap B|}{p} = \frac{|A|}{p} \times \frac{|B|}{p}$$

$$\frac{|A \cap B|}{p} = \frac{|A| \times |B|}{p^2}$$

$$p \underbrace{|A \cap B|}_{\in \mathbb{N}} = |A| \times |B| \quad \left. \vphantom{\frac{|A| \times |B|}{p^2}} \right\} \times p^2$$

on a $p \mid |A| \times |B|$.

d'où $p \mid |A|$ ou $p \mid |B|$

impossible car $1 \leq |A|, |B| \leq p-1$

exercice 5:

$$1) P(\text{"pas corriger"}) = \frac{2}{3}.$$

Comme les relectures sont indépendantes :

$$P(\text{"erreur \& pas corriger à la n-ième lecture"})$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

2) Par une erreur, la proba qu'elle soit corrigée à la n-ième lecture :

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

La proba que le sujet
soit entièrement corrigé à
la n-ième lecture :

$$\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^4$$

car les erreurs sont indépendantes.

$$\bullet \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^4 > 0,9$$

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0,9^{\frac{1}{4}}$$

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0,9^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < (1 - 0,9^{\frac{1}{4}})$$

$$n \ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln\left(1 - 0,9^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$n > \frac{\ln\left(1 - 0,9^{\frac{1}{4}}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

exercice 6:

$$X \subset \mathcal{P}(n, p)$$

$$Y \subset \mathcal{P}(m, p).$$

$$X = X_1 + \dots + X_n, \quad X_i \subset \mathcal{P}(p)$$

$$Y = Y_1 + \dots + Y_m, \quad Y_i \subset \mathcal{P}(p)$$

$$X + Y = \underbrace{X_1 + \dots + X_n}_{n+m} + \underbrace{Y_1 + \dots + Y_m}_{v.a. \mathcal{B}(\mathcal{P})}$$

ind.

done $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m, \mathcal{P})$.

Exercise 7:

1) a) $\begin{cases} ab = \lambda \\ cd = \lambda \end{cases} \Rightarrow abcd = \lambda^2$

b) $abcd = \overbrace{(ab)}^{>0} \overbrace{(cd)}^{>0} > 0$

on a : $ac + bd \leq \lambda$

$$a + b \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

$$(ac) \times (bd) \leq \left(\frac{ac + bd}{2} \right)^2$$

$$\leq \frac{\lambda^2}{4}$$

$$< \lambda^2$$

done $(ac) \times (bd) < \lambda^2$.