

TD 8

exercice 1:

$$\sum_{n \geq 0} q^n \text{ cv } (\Leftrightarrow) |q| < 1$$

$$\text{et } \sum_{n \geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$$

exercice 2:

$$\bullet \frac{n}{n^4 + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3} > 0$$

or d'après Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$
CV car $3 > 1$.

Donc par équivalent de
séries à termes positifs,
 $\sum \frac{n}{n^4 + 1}$ CV.

$$\bullet \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} > 0$$

or d'après Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$
CV car $\frac{3}{2} > 1$.

Donc par équivalent de série
à termes positifs, $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$ CV

$$2) \text{ on a : } n! > 2^{n-1}$$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\propto \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

est une série géométrique
et $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, donc elle converge.

Donc par comparaison de séries
à termes positifs $\sum \frac{1}{n!}$ cv.

exercice 3:

$$\bullet \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{|n|}$$

$$= q^{|0|} + \sum_{\substack{n \leq -1 \\ \text{on pose } k = -n}} q^{|n|} + \sum_{n \geq 1} q^{|n|}$$

$$\text{or } |n| = |-n|$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} q^{|n|} + \sum_{n \geq 1} q^{|n|}$$

$$= 1 + 2 \sum_{n \geq 1} q^n$$

$$= 1 + 2 \times q^1 \times \frac{1}{1-q}, \quad \text{car } 0 < q < 1$$

$$= 1 + \frac{2q}{1-q} = \frac{1-q+2q}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}$$

exercice 4:

1) $\mathbb{Q} \cap [1; +\infty[$

or $\mathbb{Q}$ est dénombrable,
et $\mathbb{Q} \cap [1; +\infty[$ est un sous-
ensemble de $\mathbb{Q}$, donc il est
au plus dénombrable.

2) $\sum_{x \in \mathbb{Q} \cap [1; +\infty[} \frac{1}{x^2} \stackrel{?}{=} +\infty$

• on se restreint à $[1; 2]$,
on a alors:

$$x^2 \leq 2^2 = 4$$

$$\text{et } \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{4}$$

Soit $x_1, \dots, x_n$ des rationnels
sur $[1; 2]$, alors on a :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} > \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} = \frac{n}{4}$$

en passant à la limite

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{x_i^2} = +\infty$$

Donc en particulier, on a

$$\sum_{x \in \mathbb{Q} \cap (1, +\infty)} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

exercice 5:

$$\cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{n=0}}^k \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k 1$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} + \frac{1}{k!}$$

Annotations: A red arrow points from the term $\frac{k}{k!}$ to the term $\frac{1}{k(k-1)!}$ above it. The fraction $\frac{k}{k!}$ is circled in red.

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Annotation: A green arrow points from the term $\frac{1}{(k-1)!}$ to the term $\frac{1}{k!}$ below it.

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$= 2 \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}}_{e^1} = 2e$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

exercice 6:

$$\bullet \sum_{n \geq 1} \frac{(1-n) \log(n)}{1+n^3}$$

$$u_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum u_n \text{ DV}$$

$$1-n \rightarrow -n$$

$$1+n^3 \rightarrow n^3$$

$$\frac{(1-n)P_n(n)}{1+n^3} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{P_n(n)}{n^2}.$$

$$\text{d'où } \left| \frac{(1-n)P_n(n)}{1+n^3} \right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{P_n(n)}{n^2} > 0$$

or pour n assez grand,

$$P_n(n) \leq \sqrt{n}$$

$$\text{d'où } \frac{P_n(n)}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

or d'après Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge car $\frac{3}{2} > 1$.

Donc par comparaison

$$\sum \frac{(1+n)h(n)}{1+n^3} \quad \text{CVA, et donc cv.}$$

exercice 7 :

$$\bullet \quad u_n = \frac{\cos(n) + e^n h(n)}{1 + e^{2n}}$$

$$|u_n| \leq \frac{|\cos(n)|}{1 + e^{2n}} + \frac{e^n h(n)}{1 + e^{2n}}$$

$$\leq \frac{1}{1 + e^{2n}} + \frac{e^n h(n)}{1 + e^{2n}}$$

$$\text{or } 1 + e^{2n} \geq e^{2n}$$

$$\leq \frac{1}{e^{2n}} + \frac{e^n h(n)}{e^{2n}}$$

$$\leq e^{-2n} + e^{-n} \ln(n)$$

$$\text{or } \sum_{n \geq 1} e^{-2n} = \sum_{n \geq 1} (e^{-2})^n$$

est une série géométrique de raison $e^{-2} < 1$, donc elle cv.

de plus,

$$\begin{aligned} e^{-n} \ln(n) &\leq e^{-n} \times e^{n/2} \\ &\leq e^{-n/2} \end{aligned}$$

$$\text{or } \sum e^{-n/2} = \sum (e^{-1/2})^n$$

est une série géométrique de raison $|e^{-1/2}| < 1$, donc

elle converge. Par comparaison,
de séries à termes positifs, $\sum e^{-n} \ln(n)$
CV

Donc par somme de séries
convergentes, $\sum e^{-n} + e^{-n} \ln(n)$ CV.

Donc par comparaison de
séries à termes positifs, $\sum |u_n|$
CV, et donc $\sum u_n$ CVA et
donc CV.

exercice 8

$$u_n = \frac{(-1)^{n^2} P_n(n)}{\pi + n^2} \geq n^2$$

$$|u_n| \leq \frac{P_n(n)}{n^2}$$