

Partie A

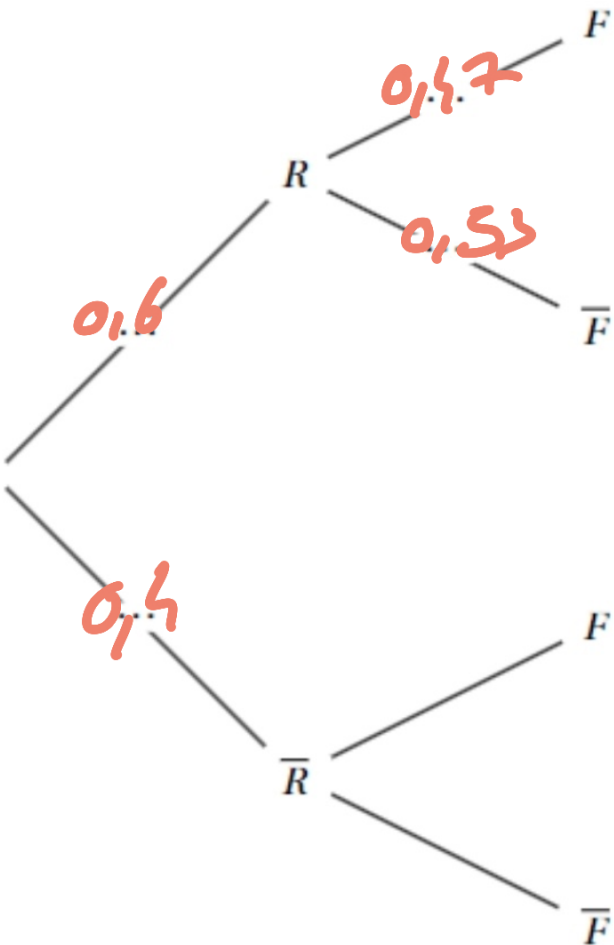
Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme «régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans. Elle constate que 60% de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47% ont acheté la carte de fidélité.
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38% ont acheté la carte de fidélité.

On interroge au hasard un client et on considère les événements suivants :

- R : « le client est un client régulier » ;
- F « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un événement E quelconque, on note $\overline{E}$ son événement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1. a. Reproduire l'arbre ci-dessous et compléter les pointillés.
1. a. Reproduire l'arbre ci-dessous et compléter les pointillés.



- b. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.
- c. Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.
- d. Le directeur du service des ventes affirme, que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80% sont des clients réguliers. Cette affirmation est-elle exacte ?

2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manières indépendante.
On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0,38$.
les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.
- a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.

- b. Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \hookrightarrow \mathbb{P}(F \cap R) = \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_R(F) \\
 & = 0,6 \times 0,47 \\
 & = 0,282.
 \end{aligned}$$

donc la proba...

$$\hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{R}}(F) = ?$$

D'après la formule des probas totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(F \cap R) + \mathbb{P}(F \cap \bar{R}) \\
 &= \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(F) + \mathbb{P}(\bar{R}) \times \mathbb{P}_{\bar{R}}(F)
 \end{aligned}$$

donc

$$0,38 = 0,282 + 0,4 \times \overline{\Pi}_{\overline{R}}(F)$$

$$0,38 - 0,282 = 0,4 \times \overline{\Pi}_{\overline{R}}(F)$$

$$0,098 = 0,4 \times \overline{\Pi}_{\overline{R}}(F)$$

$$\frac{0,098}{0,4} = \overline{\Pi}_{\overline{R}}(F)$$

$$\text{donc } \overline{\Pi}_{\overline{R}}(F) = 0,245.$$

$$d) \overline{\Pi}_F(R) = \frac{\overline{\Pi}(F \cap R)}{\overline{\Pi}(F)}$$

$$= \frac{0,282}{0,38}$$

$$\approx 0,74$$

donc il y a 74 % ...

Donc l'affirmation est fautive.

2) a) On répète 20 fois de manière identiques et indépendantes la même expérience dont la probabilité de succès est 0,38.

Donc $X \sim \mathcal{B}(20; 0,38)$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 4) \\ &= 1 - 0,073 \\ &\approx 0,927 \end{aligned}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exercice 1 (5 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$y' + ay = g(t)$$

$$(E) : y' + 0,4y = e^{-0,4t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t .

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = te^{-0,4t}$.
Vérifier que u est solution de E .

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f(t) - u(t)$.

Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0,4y = 0$.

- a. Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) .

On admettra que la réciproque est vraie.

- b. Résoudre l'équation différentielle (H) .

- c. En déduire les solutions de (E) .

- d. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

$$1) u'(t) = 1 \times e^{-0,4t} + t \times -0,4 e^{-0,4t}$$

$$\begin{aligned} d'a \quad u'(t) + 0,4 u(t) \\ = e^{-0,4t} - 0,4 t e^{-0,4t} + 0,4 t e^{-0,4t} \end{aligned}$$

$$= e^{-0,4t}$$

donc u est solution de (E).

2) a) On suppose que g est solution de (H).

$$g' + 0,4g = 0$$

$$(g - u)' + 0,4(g - u) = 0$$

$$g' - u' + 0,4g - 0,4u = 0$$

$$(g' + 0,4g) - (u' + 0,4u) = 0$$

$$g' + 0,4g - e^{-0,4t} = 0$$

$$g' + 0,4g = e^{-0,4t}$$

donc f est solution de (E).

b) (H): $y' + 0,4y = 0$

$$\hookrightarrow y' = -0,4y$$

$$\Rightarrow y(t) = C e^{-0,4t}, \quad \underline{C \in \mathbb{R}}$$

$$\mathcal{S} = \{ y_h + y_p \}$$

c) Donc les solutions de (E) sont:

$$f(t) = C e^{-0,4t} + t e^{-0,4t}, \quad \underline{C \in \mathbb{R}}$$

d) $f(0) = 1$

$$f(0) = C e^0 + 0,1 e^0 = C$$

donc $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1.$

Donc la solution est:

$$f(t) = e^{-0,5t} + t e^{-0,5t}.$$