

Worksheet 3.2

exercice 3 :

1) . Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$.

$$\begin{aligned}\psi(P+Q) &= (P+Q)(x+1) - (P+Q)(x) \\ &= P(x+1) + Q(x+1) - P(x) - Q(x) \\ &= (P(x+1) - P(x)) + (Q(x+1) - Q(x)) \\ &= \psi(P) + \psi(Q).\end{aligned}$$

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}_n[x]$.

$$\psi(\lambda P) = (\lambda P)(x+1) - (\lambda P)(x)$$

$$= \lambda P(x+1) - \lambda P(x)$$

$$= \lambda (P(x+1) - P(x))$$

$$= \lambda \psi(P).$$

donc ψ est linéaire.

• Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\deg(P) \leq n$

alors $\deg(\psi(P))$

$$= \deg(P(x+1) - P(x))$$

$$\leq n \quad \text{car} \quad \begin{array}{l} \deg P(x+1) \leq n \\ \deg P(x) \leq n \end{array}$$

donc $\psi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$

2) a) Seien $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $P \neq 0$

$$\deg(P) = m \leq n$$

$$\Rightarrow P(x) = a_m x^m + \dots, \quad a_m \neq 0$$

$$\psi(P) = P(x+1) - P(x)$$

$$= (a_m (x+1)^m + \dots) - (a_m x^m + \dots)$$

$$= a_m [(x+1)^m - x^m] + \dots$$

$$\text{or } (x+1)^m - x^m = \cancel{x^m} + m x^{m-1} + \dots - \cancel{x^m}$$

$$= m x^{m-1} + \dots$$

$$\text{donc } \deg(\psi(P)) = m - 1 \\ = \deg(P) - 1.$$

$$\text{or } P = cte, \quad \deg(\psi(P)) = 0$$

$$b) \cdot \ker(\psi) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \psi(P) = 0\}$$

$$\psi(P) = 0 \Leftrightarrow P(x+1) - P(x) = 0$$

$$\Rightarrow P(x+1) = P(x), \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow P = cte.$$

$$\text{donc } \ker(\psi) = \mathbb{R}$$

- nullity rank theorem:

$$\dim(\mathbb{R}_n[x]) = \dim(\ker(\psi)) + \dim(\operatorname{im}(\psi))$$

$$n+1 = 1 + \dim(\operatorname{im}(\psi))$$

$$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(\psi)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[x])$$

de plus $\operatorname{Im}(\psi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$
par question 2) a)

Donc $\operatorname{Im}(\psi) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

3) on suppose $\deg P = n$
alors $\deg(\psi(P)) = n-1$.

Et par récurrence immédiate
 $\deg(\psi^k(P)) = n-k$, $0 \leq k \leq n$

Donc les polynômes $P, \psi(P), \psi^2(P), \dots, \psi^n(P)$, sont tous de degré distinct.

Ainsi la famille $(P, \psi(P), \dots, \psi^n(P))$ est linéairement indépendante.

De plus, il y a $n+1$ éléments,
donc la famille $(P, \psi(P), \dots, \psi^n(P))$
est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

4) a) Comme $I_n(\psi) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$,

alors pour $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, il existe au moins un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\psi(P) = Q(x)$$

$$\Leftrightarrow P(x+1) - P(x) = Q(x).$$

or $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$
avec $n = \deg(P)$.

Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[x]$ tels
que $\psi(P_1) = \psi(P_2)$, $P_1(0) = 0 = P_2(0)$.

$$\text{Donc } \psi(P_1) - \psi(P_2) = 0$$

$$\psi(P_1 - P_2) = 0$$

$$P_1 - P_2 \in \ker(\psi)$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = C$$

$$\text{or } (P_1 - P_2)(0) = P_1(0) - P_2(0) = 0$$

$$\text{Donc } C = 0, \text{ et } P_1 = P_2.$$

Donc il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que

$$P(x+1) - P(x) = q \text{ et } P(0) = 0$$

Worksheet 3.3

1) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel
que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre.

De plus, $\text{card}(\mathcal{B}_e) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Donc $\mathcal{B}_e = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une
base de $\mathbb{R}^3$.

$$2) \quad p(e_1) = e_1$$

$$p(e_2) = e_2$$

$$p(e_3) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad x = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in G}$$

$$\Rightarrow p(x) = f \in F$$

$$\bullet \text{ Si } x \in F, \quad x = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}$$

$$\text{donc } p(x) = f = x$$

$$\bullet \text{ Si } x \in G, \quad x = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in G}$$

$$\text{donc } p(x) = 0.$$

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$(p(e_1) \quad p(e_2) \quad p(e_3))$

3) $M = P M_e P^{-1}$ ↖ exprime b.c avec la nouvelle base
 $M_e \rightarrow \beta$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1, 0, 1) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 1, 2) \end{matrix}$

$e_1 \quad e_2 \quad e_3$

$$E \rightarrow \beta_1 \text{ et } \beta_2$$

~~$$F \rightarrow \epsilon_1 \text{ et } \epsilon_2$$~~

$$\varphi : E \rightarrow F/E$$

$$A = \prod_{\beta_1 \cancel{e_1}} \beta$$

$$B = \prod_{\beta_2 \cancel{e_2}} \beta$$

$$P = \bigcap_{\beta_1 \rightarrow \beta_2}$$

$$\cancel{Q = \bigcap_{e_1 \rightarrow e_2}}$$

$$B = P^{-1} A P$$

$$A = P B P^{-1}$$

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$