



TD #3

Ex 1

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notons $w_1 = f(u_1)$, $w_2 = f(u_2)$

Application linéaire:

C'est une fonction entre deux espaces vectoriels qui respecte la structure de ces espaces. Elle doit toujours vérifier deux règles:

- 1) L'addition: $f(u+v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in E$
- 2) La multiplication par un scalaire:

✓ $f(\lambda u) = \lambda f(u)$
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u \in E$

Combinaison linéaire:

• C'est le vecteur qu'on obtient quand on multiplie plusieurs vecteurs par des nombres et qu'on les additionne ensemble.

Exemple: si on a les vecteurs u_1, u_2 et les nombres 2 et -5. L'expression $2u_1 - 5u_2$ est une combinaison linéaire.

Base canonique:

• C'est la base la plus simple et la plus "naturelle" pour un espace. Ses vecteurs sont composés d'un seul "1" et de "0" partout ailleurs.

Exemple: dans $\mathbb{R}^2$, la base canonique est composée des vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

i) $e_1, e_2, \dots, e_n$ - tous les base canonique.

$$\text{dans } \mathbb{R}^2 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\text{dans } \mathbb{R}^3 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

On commence par $e_1 = \alpha u_1 + \beta u_2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 3\beta \\ 0 = 3\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 9\alpha = 1 \\ \beta = -3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{11} \\ \beta = -\frac{3}{11} \end{cases} \quad \checkmark$$

$$e_2 = \gamma u_1 + \delta u_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} 2\gamma - 3\delta = 0 \\ 3\gamma + \delta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\gamma - 3 + 5\gamma = 0 \\ \delta = 1 - 3\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11\gamma = 3 \\ \delta = 1 - 3\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{3}{11} \\ \delta = \frac{11}{11} - \frac{9}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{3}{11} \\ \delta = \frac{2}{11} \end{cases} \quad \checkmark$$

Alors:

$$e_1 = \frac{1}{11}u_1 - \frac{3}{11}u_2$$

$$e_2 = \frac{3}{11}u_1 + \frac{2}{11}u_2$$

$$\underline{\underline{N_{Kyd}}}$$

ii) Que valent $f(e_1)$, $f(e_2)$ en fonctions de w_1 , w_2

$$f\left(\frac{1}{11}u_1 - \frac{3}{11}u_2\right) = f\left(\frac{1}{11}u_1\right) - f\left(\frac{3}{11}u_2\right) =$$

$$= \frac{1}{11}f(u_1) - \frac{3}{11}f(u_2) = \frac{1}{11}w_1 - \frac{3}{11}w_2 \Rightarrow$$

$$f(e_1) = \frac{1}{11}w_1 - \frac{3}{11}w_2$$

$$f(e_2) = f\left(\frac{3}{11}u_1 + \frac{2}{11}u_2\right) = f\left(\frac{3}{11}u_1\right) + f\left(\frac{2}{11}u_2\right)$$

$$= \frac{3}{11}f(u_1) + \frac{2}{11}f(u_2) = \frac{3}{11}w_1 + \frac{2}{11}w_2 \Rightarrow$$

$$f(e_2) = \frac{3}{11}w_1 + \frac{2}{11}w_2$$

Que vaut $f(x, y)$ en fonction de w_1, w_2 ?

Memoriser:

* autre base (u_1, u_2)

$$(x, y) = x u_1 + y u_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2$$

base canonique

Alors on peut dire que
le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2$, donc

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x e_1 + y e_2) = f(x e_1) + f(y e_2) = \\ &= x f(e_1) + y f(e_2) = x \left(\frac{1}{11} w_1 - \frac{3}{11} w_2\right) + \\ &+ y \left(\frac{3}{11} w_1 + \frac{2}{11} w_2\right) \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } f(x, y) = x \left(\frac{1}{11} w_1 - \frac{3}{11} w_2\right) + y \left(\frac{3}{11} w_1 + \frac{2}{11} w_2\right)$$

$$= \left(\frac{x}{11} + \frac{3y}{11}\right) w_1 + \left(\frac{2y}{11} - \frac{3x}{11}\right) w_2$$

✓

iii) On suppose que $w_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -44 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -22 \\ -33 \\ 11 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \left(\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -44 \end{pmatrix} - \frac{3}{11} \begin{pmatrix} -22 \\ -33 \\ 11 \end{pmatrix} \right) + \\ &+ y \left(\frac{3}{11} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -44 \end{pmatrix} + \frac{2}{11} \begin{pmatrix} -22 \\ -33 \\ 11 \end{pmatrix} \right) = \\ &= x \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + y \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= x \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x - y \\ 9x - 6y \\ -7x - 10y \end{pmatrix} \checkmark \end{aligned}$$

On sait que :

$$A = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \quad l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d \cdot 0 \\ b + e \cdot 0 \\ c + f \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

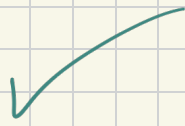
$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + d \\ b \cdot 0 + e \\ c \cdot 0 + f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & -6 \\ -7 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 7x - y \\ = 5x - 6y \\ -7x - 10y \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & -6 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}$$



$$\mathbb{R}[x] = \{ \text{tout} \}$$

$$e_{x,3} \quad \mathbb{R}_n[x] = \{ \deg \leq n \}$$

$\mathbb{R}[x]$ (Espace des polynômes) -
 l'espace de tous les polynômes à coefficients réels.
 То есть наши "векторы" теперь -
 это выражения типа: $P = 3x^2 - 2x + 5$

La dérivée (P') - $\kappa\pi\alpha\upsilon\lambda\omicron\gamma\mu\alpha$.

Να με ορίσουμε d παράγει
так: оно берет на вход многочлен P
и выдает его производную P' .

i) Montrer que d est $\mathbb{R}$ -linéaire.

Soit $E = \mathbb{R}[x]$, $d: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$

$d(P) = P'$ pour $P \in \mathbb{R}[x]$

Alors il faut vérifier deux
propriétés: addition et multiplication.

On prends: $P, Q \in \mathbb{R}[x]$.

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[x]$

$$d(P+Q) = (P+Q)' = P' + Q' = d(P) + d(Q)$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}[x]$.

$$d(\lambda P) = (\lambda P)' = \lambda (P)' = \lambda d(P)$$

Alors d est linéaire. ✓

ii) Montrer que $\text{Ker}(d)$ est un espace vectoriel de dimension 1, donner une base de $\text{Ker}(d)$

Le noyau (Ker) — это множество отображений. Каноническим образом "векторов" (множества), которые нами сразу преобразуют в 0. Мы знаем правило отображения $f(x) = 0$.

Alors il faut montrer :

~~Suit $p \in \text{Ker}(d)$~~

$$d(p) = 0$$

$$\text{Ker}(g) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$p' = 0$$

application linéaire.

Donc p c'est une constante. ✓

$$p(x) = c \leftarrow \text{constante}$$

$$\boxed{\text{Ker}(d) = \text{Vect} \{1\}}$$

$$\Rightarrow \text{un } \text{ker} = \{1\}$$

$$= \{p \text{ const}\}$$

$$\text{donc } \text{Ker}(d) = \mathbb{R}$$

$$\text{et } \dim(\text{Ker}(d)) = 1$$

Si C est une constante, alors

$$\dim(\ker(d)) = 1 \quad \checkmark$$

$$\dim(\ker(d)) = 1 \\ \text{et } \ker(d) = \mathbb{R}$$

$$\dim(\ker(d)) = \mathbb{R} = 1$$

iii) $\mathcal{D} = \{1-x, 1+x\} \Rightarrow \ker(d) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1+x \\ 1-x \end{pmatrix}$

L'application d est surjective si pour chaque polynôme d'arrivée Q , on peut trouver un polynôme de départ P tel que sa dérivée donne Q ($d(P) = Q$) $\checkmark$

$$\int x^k = \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

polynôme

Soit $Q \in \mathbb{R}[x]$,

on pose P une primitive de Q , alors $P \in \mathbb{R}[x]$ et $d(P) = P' = Q$.

$$\text{Si } Q \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow P \in \mathbb{R}[x] \text{ d/p } d(P) = Q$$

primitive de Q

Donc d est surjective.

oui mais rédaction 

$f : E \rightarrow F$ surjective

$\Leftrightarrow \underline{\text{Im}(f)} = F$
 $\{f(x) : x \in E\} \rightarrow \subset \text{case}$

$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$