



TD #3

Ex 1

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notons $w_1 = f(u_1)$, $w_2 = f(u_2)$

Application linéaire:

C'est une fonction entre deux espaces vectoriels qui respecte la structure de ces espaces. Elle doit toujours vérifier deux règles:

1) L'addition: $f(u+v) = f(u) + f(v)$

2) La multiplication par un scalaire:

$$f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

Combinaison linéaire:

• C'est le vecteur qu'on obtient quand on multiplie plusieurs vecteurs par des nombres et qu'on les additionne ensemble.

Exemple: si on a les vecteurs u_1, u_2 et les nombres 2 et -5. L'expression $2u_1 - 5u_2$ est une combinaison linéaire.

Base canonique:

• C'est la base la plus simple et la plus "naturelle" pour un espace. Ses vecteurs sont composés d'un seul "1" et de "0" partout ailleurs.

Exemple: dans $\mathbb{R}^2$, la base canonique est composée des vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

i) $e_1, e_2, \dots, e_n$ - toujours base canonique.

$$\text{dans } \mathbb{R}^2 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{dans } \mathbb{R}^3 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On commence par $e_1 = \alpha u_1 + \beta u_2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 3\beta \\ 0 = 3\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\alpha = 1 \\ \beta = -3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{11} \\ \beta = -\frac{3}{11} \end{cases}$$

$$e_2 = \gamma u_1 + \delta u_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\gamma - 3\delta = 0 \\ 3\gamma + \delta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\gamma - 3 + 5\gamma = 0 \\ \delta = 1 - 3\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11\gamma = 3 \\ \delta = 1 - 3\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{3}{11} \\ \delta = \frac{11}{11} - \frac{9}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{3}{11} \\ \delta = \frac{2}{11} \end{cases}$$

Alors:

$$c_1 = \frac{1}{11}u_1 - \frac{3}{11}u_2$$

$$c_2 = \frac{3}{11}u_1 + \frac{2}{11}u_2$$

$$\underline{\underline{\mathcal{L}_{KZD}}}$$

ii) Que valent $f(c_1)$, $f(c_2)$ en fonctions de w_1 , w_2

$$f\left(\frac{1}{11}u_1 - \frac{3}{11}u_2\right) = f\left(\frac{1}{11}u_1\right) - f\left(\frac{3}{11}u_2\right) =$$

$$= \frac{1}{11}f(u_1) - \frac{3}{11}f(u_2) = \frac{1}{11}w_1 - \frac{3}{11}w_2 \Rightarrow$$

$$f(c_1) = \frac{1}{11}w_1 - \frac{3}{11}w_2$$

$$f(c_2) = f\left(\frac{3}{11}u_1 + \frac{2}{11}u_2\right) = f\left(\frac{3}{11}u_1\right) + f\left(\frac{2}{11}u_2\right) =$$

$$= \frac{3}{11}f(u_1) + \frac{2}{11}f(u_2) = \frac{3}{11}w_1 + \frac{2}{11}w_2 \Rightarrow$$

$$f(c_2) = \frac{3}{11}w_1 + \frac{2}{11}w_2$$

Que vaut $f(x, y)$ en fonction de w_1, w_2 ?

Memoriser:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2$$

↑ ↑
base canonique

Alors on peut dire que
le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2$, donc

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x e_1 + y e_2) = f(x e_1) + f(y e_2) = \\ &= x f(e_1) + y f(e_2) = x \left(\frac{1}{11} w_1 - \frac{3}{11} w_2 \right) + \\ &+ y \left(\frac{3}{11} w_1 + \frac{2}{11} w_2 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } f(x, y) = x \left(\frac{1}{11} w_1 - \frac{3}{11} w_2 \right) + y \left(\frac{3}{11} w_1 + \frac{2}{11} w_2 \right)$$

iii) On suppose que $w_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -44 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -22 \\ -33 \\ 11 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \left(\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -44 \end{pmatrix} - \frac{3}{11} \begin{pmatrix} -22 \\ -33 \\ 11 \end{pmatrix} \right) + \\ &+ y \left(\frac{3}{11} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -44 \end{pmatrix} + \frac{2}{11} \begin{pmatrix} -22 \\ -33 \\ 11 \end{pmatrix} \right) = \\ &= x \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + y \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= x \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x - y \\ 9x - 6y \\ -7x + 10y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On sait que :

$$A = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \quad l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d \cdot 0 \\ b + e \cdot 0 \\ c + f \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + d \\ b \cdot 0 + e \\ c \cdot 0 + f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & -6 \\ -7 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 7x - y \\ = 5x - 6y \\ -7x - 10y \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & -6 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}$$

e_{x3}

$\mathbb{R}[x]$ (Espace des polynômes) —
пространство всех полиномов с
вещественными коэффициентами.
То есть наши "векторы" теперь —
это выражения типа: $p = 3x^2 - 2x + 5$

La dérivée (P') - производная.

Намне необходимо доказать так: оно берет на вход многочлен P и выдает его производную P' .

i) Montrer que d est $\mathbb{R}$ -linéaire.

Soit $E = \mathbb{R}[x]$, $d: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$

$d(P) = P'$ pour $P \in \mathbb{R}[x]$

Alors il faut vérifier deux propriétés: addition et multiplication.

On prends: P, Q

$$d(P+Q) = (P+Q)' = P' + Q' = d(P) + d(Q) \quad \checkmark$$

$$d(\lambda P) = (\lambda P)' = \lambda (P)' = \lambda d(P) \quad \checkmark$$

Alors d est linéaire.

ii) Montrer que $\text{Ker}(d)$ est un espace vectoriel de dimension 1, donner une base de $\text{Ker}(d)$

Le noyau (Ker) — это линейное отображение. Конечно абсолютно все "векторы" (минимум), которые нами сразу преобразуют в 0. Нужно помнить уравнение $f(x)=0$.

Alors il faut chercher :

$$d(p)=0$$

$$p'=0$$

Donc p c'est une constante.

$$p(x)=c \leftarrow \text{constante}$$

$$\boxed{\text{ker}(d)=1}$$

Si C est une constante, alors

$$\text{base}(\ker(d)) = 1$$

$$\dim(\text{base}(\ker(d))) = 1 \mathbb{R} = 1$$

iii) L'application d est surjective si pour chaque polynôme d'arrivée Q , on peut trouver un polynôme de départ P tel que sa dérivée donne Q ($d(P) = Q$)

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polynôme}}}{x^k} = \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Si $Q \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow P \in \mathbb{R}[x]$ $d(P) = Q$
 $\uparrow$
primitive de Q

Donc d est surjective.

15/04/2026

E_{x4}

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{x-2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -7 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 0 \\ -y - 7z - 7t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2(-7z - 7t) + 3z + 2t = 0 \\ y = -7z - 7t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 11z - 14t = 0 \\ y = -7z - 7t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 11z - 14t = 0 \\ y = -7z - 7t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11z + 14t \\ y = -7z - 7t \end{cases}$$

$$\ker(A) = \{ 11z + 14t, -7z - 7t, z, t \mid z, t \in \mathbb{K} \}$$

$$= \{ z(11, -7, 1, 0) + t(14, -7, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{K} \}$$

csc les vecteurs sont non colinéaires.

$$\dim(\ker(A)) = 2$$

$$\ker(A) = \text{vect}(u_1, u_2) \text{ ou } u_1 = (11, -7, 1, 0)$$

$$u_2 = (14, -7, 0, 1)$$

$$\dim(\ker(A)) = 2$$

pour compléter cette base on peut prendre les deux vecteurs de la base

canonique $u_3 = (1, 0, 0, 0)$ et $u_4 = (0, 1, 0, 0)$ ✓

ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\hookrightarrow$ il faut vérifier que la famille est libre ☺

$$f_A(u_3) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$f_A(u_4) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$f_A(u_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

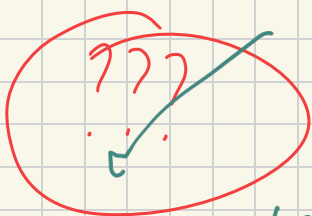
$$f_A(u_4) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda + 3\mu = 0 \\ \lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\mu + 3\mu = 0 \\ \lambda = -2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

Alors les vecteurs $(2, 1)$ et $(3, 2)$ sont lin. indépendants donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$ ✓

$$+ \text{card} \{f(u_3), f(u_4)\} = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

iii) $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



$P^{-1} A Q$ with annotations: $\frac{1}{5} \delta_{1,1}$ above P^{-1} , $\frac{1}{5} \delta_{2,2}$ above A , and $\frac{1}{5} \delta_{3,3}$ above Q .

→ changement de base de $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ vers $\{\delta(u_3), \delta(u_4)\}$.

donc les colonnes sont $\delta(u_1), \delta(u_2), \delta(u_3), \delta(u_4)$

dans la base $\{\delta(u_3), \delta(u_4)\}$.

$P^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\delta(u_1) \delta(u_2) \delta(u_3) \delta(u_4)$

$P^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times 5$
 $M_{B_2}^{B_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

$B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$

i) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ et $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$

1) On aura $f(u)$ dans la base B_2 .

2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix}$

$$f(u) = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4)v_1 + (2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)v_2 + (-\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4)v_3 \quad \checkmark$$

ii) Le ker de l'application linéaire $f: E \rightarrow F$, noté $\ker(f)$, est l'ensemble des vecteurs $u \in E$ tels que $f(u) = 0_F$

Quel est le lien entre $\ker(f)$ et $\ker(M_{B_2}^{B_1}(f))$ ✓

si $f(u) = 0_F$ si on multiplie par $M_{B_2}^{B_1}(f)$

On aura $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z - 2 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\ker(M_{B_2}^{B_1}(f)) = \{ -z + 1z, +z \mid z, + \in \mathbb{R}^2 \} =$$

$$= \{ z(-1, 1, 0, 1) + t(0, 1, 1, 0) \mid z, t \in \mathbb{R}^2 \} = \checkmark$$

$$= \text{Vect} \{ (-1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \} \quad \checkmark$$

$$\dim(\ker(M_{B_2}^{B_1}(f))) = 2 \quad \checkmark$$

dire que les
vecteurs sont
en colonnes.

$$\text{Base de } (\ker(M_{B_2}^{B_1}(f))) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \checkmark$$

$$\ker(f) = \lambda_1 u_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) u_2 + \lambda_2 u_3 + \lambda_1 u_4 \quad \dots$$

$$(-1, 1, 0, 1) = u_2 + u_4$$

$$(0, 1, 1, 0) = -u_1 + u_2 + u_4$$

donc une base de $\ker(f)$ est

$$\{ u_2 + u_4 ; -u_1 + u_2 + u_4 \}.$$

$$f: E \longrightarrow F$$

$\swarrow \beta_1$
 $\searrow \epsilon_1$

$$A = \mathcal{M}_{\epsilon_1}^{\beta_1} f$$

$$B = \mathcal{M}_{\epsilon_2}^{\beta_2} f$$

$$P = \mathcal{M}_{\beta_1 \rightarrow \beta_2}$$

départ

$$Q = \mathcal{M}_{\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2}$$

arrivée

$$B = Q^{-1} A P$$

$$A : \mathcal{M}_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{B}_1} f \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{canonique } \mathbb{R}^4} \\ \xrightarrow{\text{canonique } \mathbb{R}^2} \end{array}$$

$$Q : \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}^{\{u_1, u_2, u_3, u_4\}} f$$

changement de base
de $\mathbb{R}^4$

$$P : \mathcal{M}_{\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2}^{\{\delta_A(u_3), \delta_A(u_4)\}} f$$

changement de base
de $\mathbb{R}^2$

$$P^{-1} A Q = \mathcal{M}_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{B}_2} f$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_A(u_3) \\ \delta_A(u_4) \\ \delta(u_1) & \delta(u_2) & \delta(u_3) & \delta(u_4) \end{pmatrix}$$