

Intégrales

exercice 1:

1) $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$.

Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

$$F(x) = \frac{6x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 3x + C$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + 3x + C$$

$$F(0) = 0$$

$$2 \times 0^3 - 2 \times 0^2 + 3 \times 0 + C = 0$$

$$\Rightarrow C = 0.$$

donc l'unique primitive qui s'annule en 0 est :

$$F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x$$

2) Calculer $\int_0^2 f(x) dx$

$$\int_0^2 f(x) dx$$

$$= \left[F(x) \right]_0^2$$

$$= (2 \times 2^3 - 2 \times 2^2 + 3 \times 2) - (2 \times 0^3 - 2 \times 0^2 + 3 \times 0) = 14$$

3) En déduire la valeur moyenne de f sur $[0; 2]$.

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$m = \frac{1}{2-0} \int_0^2 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \times 14$$

$$= 7$$

Exercice 2.

Soit g et G définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2 \ln x}{x} \text{ et } G(x) = (\ln x)^2$$

1. Démontrer que G est une primitive de g .
2. Trouver la primitive de g qui s'annule pour $x = e$.
3. Montrer que :

$$(u^2)' = 2uu'$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$$

4. Calculer la valeur moyenne de g sur $[1; e]$.

$$1) G'(x) = 2 \times \ln(x) \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2 \ln(x)}{x}$$

$$= g(x)$$

donc G est une primitive de g .

$$2) (\ln(x))^2 + C = G(x)$$

$$G(e) = 0 \Leftrightarrow (\ln(e))^2 + C = 0$$

$$1^2 + C = 0$$

$$C = -1$$

donc l'unique primitive
qui s'annule en $x=e$ est

$$G(x) = (f(x))^2 - 1.$$

$$3) \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^e g(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} [G(x)]_1^e$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[(P_n(e))^2 - (P_n(1))^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \times (1^2 - 0^2)$$

$$= \frac{1}{2} .$$

$$4) m = \frac{1}{e-1} \int_1^e g(x) dx$$

$$= \frac{1}{e-1} \times 1$$

$$= \frac{1}{e-1}$$

Exercice 3.

Soit h et H définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (1 - 2x^2) e^{1-x^2} \text{ et } H(x) = x e^{1-x^2}$$

1. Démontrer que H est une primitive de h .

2. Calculer :

$$\int_0^1 h(x) dx$$

3. En déduire que la valeur de :

$$\int_0^1 (2 - 4x^2) e^{1-x^2} dx$$

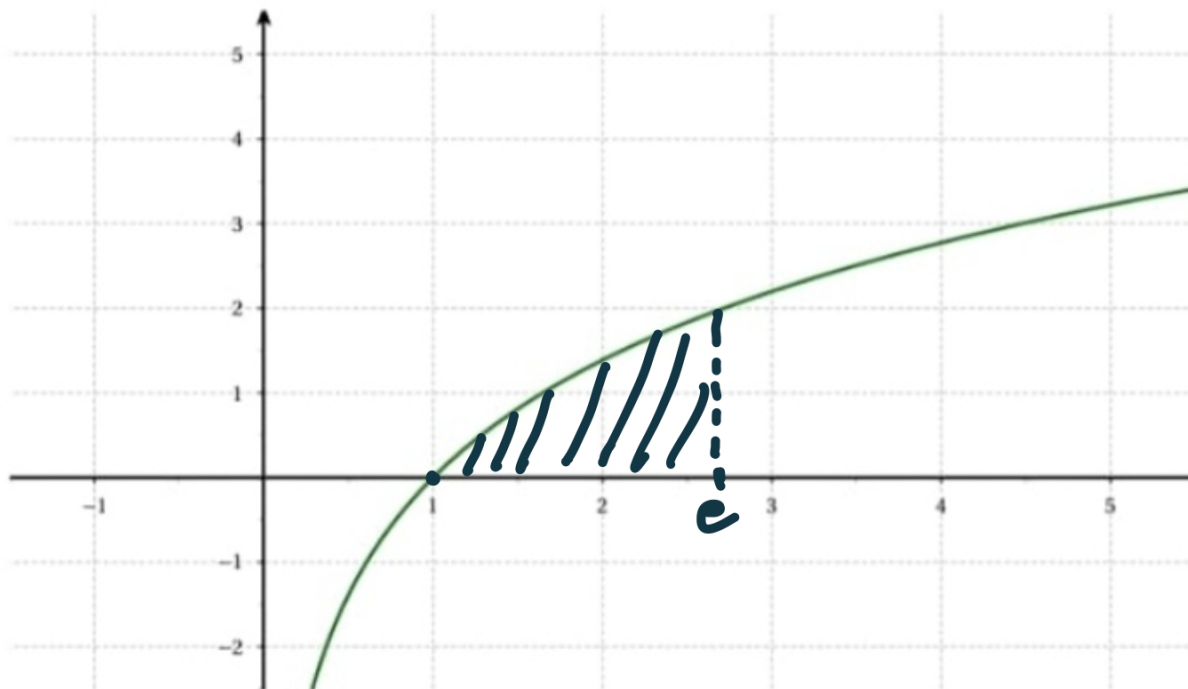
$$\begin{aligned} 2) \int_0^1 h(x) dx &= \left[x e^{1-x^2} \right]_0^1 \\ &= (1 \times e^{1-1^2}) - (0 \times e^{1-0^2}) \\ &= 1 \times e^0 - 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$3) 2 \int_0^1 h(x) dx = 2 \times 1 = 2.$$

Exercice 4. Un encadrement

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2\ln x$$



1. On donne la courbe de f sur le graphique ci-dessus.

Hachurer sur le graphique l'aire située sous la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

2. Donner un encadrement (en unités d'aire du repère orthogonal donné) de l'aire hachurée.

3. Montrer qu'une primitive de f sur $]0; +\infty[$ est :

$$F(x) = 2x \ln x - 2x$$

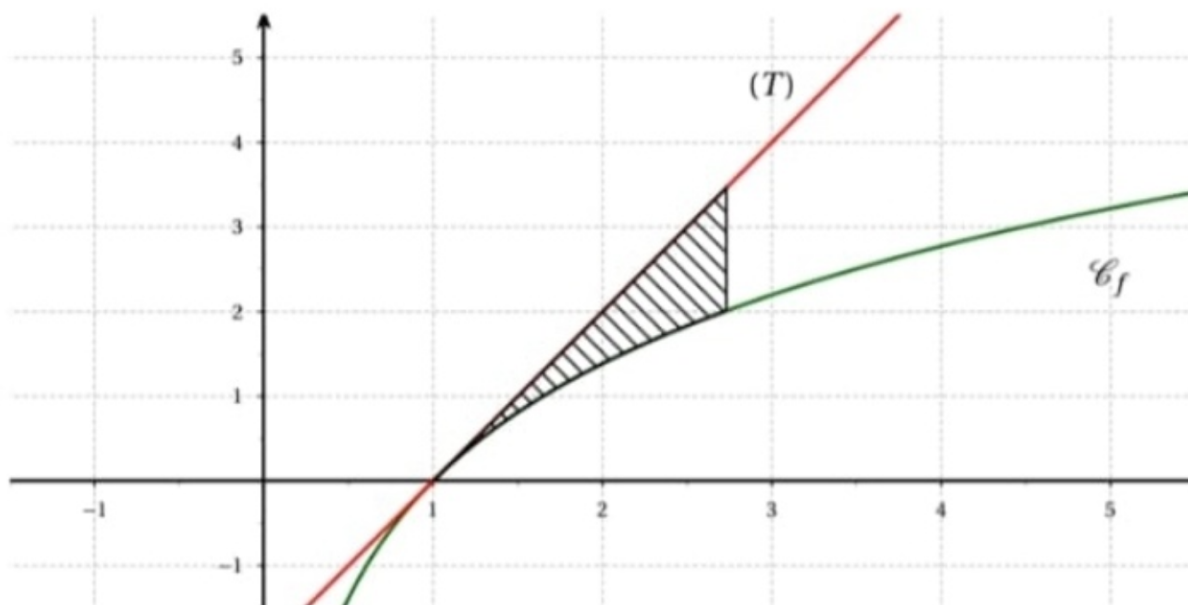
$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} - 2 \\ &= 2\ln(x) + 2 - 2 \\ &= 2\ln(x) = f(x) \end{aligned}$$

4. Montrer que l'intégrale sur $[1; e]$ de f est :

$$\int_1^e 2\ln x \, dx = 2$$

5. On a tracé ci-dessous (T) , la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. La tangente (T) est d'équation $y = 2x - 2$.

On admet que (T) est située au dessus de $\mathcal{C}_f$. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.



$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) \, dx &= (2e \ln(e) - 2e) - (2 \times 1 \ln(1) - 2 \times 1) \\ &= (2e \times 1 - 2e) - (0 - 2) = 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$