

Worksheet 3.3

exercice 3 :

$$P \circ P = P^2$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= P$$

donc f est une projection.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= I_3$$

$$SOS = id$$

donc g est une symétrie.

Projection $\begin{cases} \rightarrow \ker(p) \\ \rightarrow \text{im}(p) = \ker(p - id) \end{cases}$

$$\ker(f) = \ker(\pi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2z, y = 2z, z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

hence $\ker(f) = \text{Span} \{(-2, 2, 1)\}.$

$$\text{Im}(f) = \ker(1 - I_3)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{2} + z = 0 \\ \cancel{-\frac{y}{2}} - z = 0 \quad -L_1 \\ \cancel{-\frac{y}{4}} - \cancel{\frac{z}{2}} = 0 \quad -\frac{1}{2}L_1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow y = -2z, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(g) = \text{Span}\{(1, 0, 0), (0, -2, 1)\}$$

symétrique $\rightarrow \ker(s - \text{id})$
 $\rightarrow \ker(s + \text{id})$

$$\ker(g - \text{id}) = \text{Span}\{(-2, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$$

$$\ker(g + \text{id}) = \text{Span}\{(-2, 1, 1)\}.$$

exercice 4:

Soit $\underbrace{(x, y, z)}_X \in \mathbb{R}^3$.

$$X = \underbrace{P(X)}_{\in P} + \lambda \underbrace{u}_{\text{direction line}}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ z = -2y \end{cases}$$

donc $P = \text{Span} \{ \underbrace{(3, 1, -2)}_u \}$.

an pcc $\varphi(x) = x - \lambda u$?

$$= (x, y, z) - \lambda(3, 1, -2)$$

$$= (x - 3\lambda, y - \lambda, z + 2\lambda)$$

$$\in \mathcal{D}$$

$$(x - 3\lambda) + (y - \lambda) + (z + 2\lambda) = 0$$

$$x + y + z - 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{x + y + z}{2}$$

Doc :

$$\varphi(x, y, z) = (x, y, z) - \left(\frac{x + y + z}{2}\right)(3, 1, -2)$$

$$P(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z; \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z; \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$$

$$M_P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

↳ canonique

$$M_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

plan

(v_1, v_2, v_3)

↳ plan

↳ fine

Pin

Worksheet 3.2

exercice 4:

$$\bullet T : E \longrightarrow E$$

$$f \mapsto T(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \underbrace{\int_0^x f(t) e^{-t^2} dt}_{F(x)}$$

$\rightarrow f \mapsto f(t) e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et F est la dérivée et continue sur $\mathbb{R}$, donc $F \in E$.

$\rightarrow$ Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$T(\lambda f + \mu g)(x)$$

$$= \int_0^x (\lambda f + \mu g)(t) e^{-t^2} dt$$

$$= \lambda \int_0^x f(t) e^{-t^2} dt + \mu \int_0^x g(t) e^{-t^2} dt$$

$$= \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x).$$

Donc : $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$

et T est un endomorphisme de E .

on suppose $T(f) = 0_E$

donc par tout $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_0^x f(t) e^{-t^2} dt = 0$$

or F est $\mathcal{C}^1$ car $t \mapsto f(t) e^{-t^2}$ est continue.

$$F'(x) = f(x) e^{-x^2}$$

comme $F(x) = 0$, alors $F'(x) = 0$.

Donc $f(x) e^{-x^2} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$.

Donc $f = 0_E$, et T est
injective car $\ker(T) = \{0\}$.

Si $\text{Im}(\tau) = \mathbb{E}$.

$$F = \tau(g) = \int_0^x g(t) e^{-t^2} dt$$

$$\Rightarrow F(0) = \tau(g)(0) = 0$$

$$\forall g \in \text{Im}(\tau), \quad g(0) = 0$$

or $g(x) = 1, \forall x$, marche pas

donc $\text{Im}(\tau) \neq \mathbb{E}$.

Donc τ pas surjective.