

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse.
La première injection est de 10 ml, puis toutes les heures, on lui injecte 1 ml.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang en prenant le modèle suivant :

- On estime que 20% de la quantité de médicament présente dans le sang est éliminée chaque heure ;
- Pour un entier naturel n , on note U_n la quantité de médicament en ml présente dans le sang au bout de n heures.

Ainsi $U_0 = 10$.

1. Justifier que $U_1 = 9$
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,8U_n + 1$
3. La suite (U_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.
4. On considère la suite (V_n) telle que : $V_n = U_n - 5$
Montrer que (V_n) est géométrique. Vous préciserez sa raison et son premier terme.
5.
 - a) Exprimer (V_n) en fonction de n .
 - b) En déduire (U_n) en fonction de n .

6. Voici un tableau de valeurs de la suite (U_n) :

n	8	9	10	11	12	13	14
U_n	5,838 861	5,671 089	5,536 871	5,429 497	5,343 597	5,274 878	5,219 902

n	15	16	17	18	19	20	21
U_n	5,175 922	5,140 737	5,112 59	5,090 072	5,072 058	5,057 646	5,046 117

n	22	23	24	25	26	27	28
U_n	5,036 893	5,029 515	5,023 612	5,018 889	5,015 112	5,012 089	5,009 671

On souhaite arrêter les injections dès lors que la quantité de médicament en ml présente dans le sang est inférieure à 5,1 ml. Au bout de combien d'heures après la première injection faudra-t-il cesser les injections ? (Pas de justification demandée)

Exercice 3 (4 points)

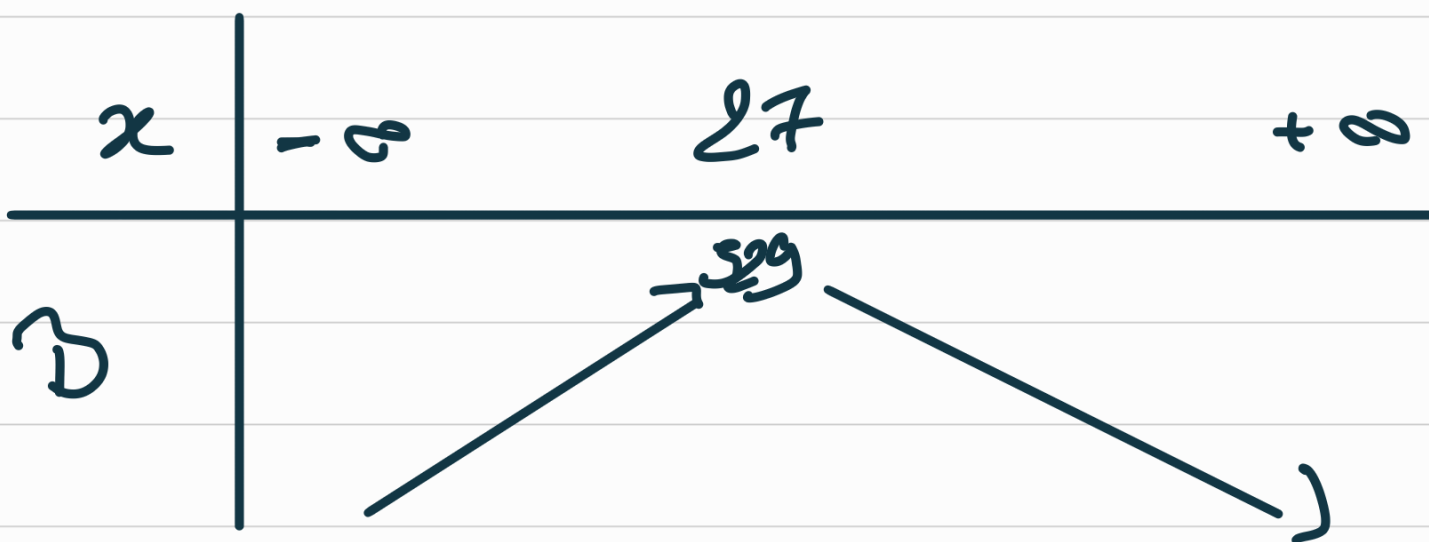
Pour les calculs, on pourra s'aider de l'aide au calcul suivante :

$$27^2 = 729$$
$$54 \times 27 = 1458$$

Soit B la fonction définie pour tout réel x par $B(x) = -x^2 + 54x - 200$.

1. Dresser, en détaillant la démarche et en utilisant vos connaissances sur le second degré (à l'exclusion de la dérivée) :
 - a. Donner le tableau de variation de la fonction B sur $\mathbb{R}$.
 - b. Préciser nature et la position la position de l'extremum
 - c. Quelle est la valeur de ce maximum ?
2. Une entreprise fabrique chaque jour x objets avec $x \in [0; 60]$. Le coût total de production de ces objets, exprimé en euros, est donné par : $C(x) = x^2 - 20x + 200$.
 - a. Sachant que chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 34 €, justifier que l'expression $B(x)$ définie en début d'exercice représente le bénéfice réalisé par l'entreprise pour x objets fabriqués et vendus.
 - b. Pour quelle quantité d'objets fabriqués et vendus le bénéfice de l'entreprise est-il maximal ? Combien d'euros l'entreprise gagnera-t-elle dans ce cas ?

1) a) $a = -1 < 0$, donc :



$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-54}{2 \times -1} = 27$$

$$p = D(27) = -27^2 + 54 \times 27 - 200$$

$$= -729 + 1458 - 200$$

$$= 1458 - 929$$

$$= 529$$

$$\begin{array}{r} 1458 \\ - 1929 \\ \hline 0529 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad a) \quad \hat{D}(x) &= 34x - C(x) \\
 &= 34x - (x^2 - 20x + 200) \\
 &= 34x - x^2 + 20x - 200 \\
 &= -x^2 + 54x - 200
 \end{aligned}$$

b) 27 objects

529 €

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'événement : "le n -ième sondage est positif" est noté V_n , on note p_n la probabilité de l'événement V_n .

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

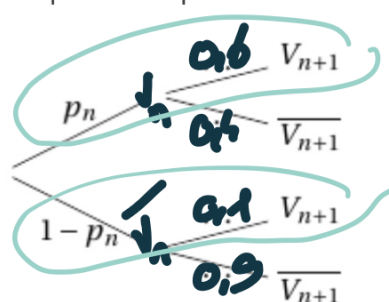
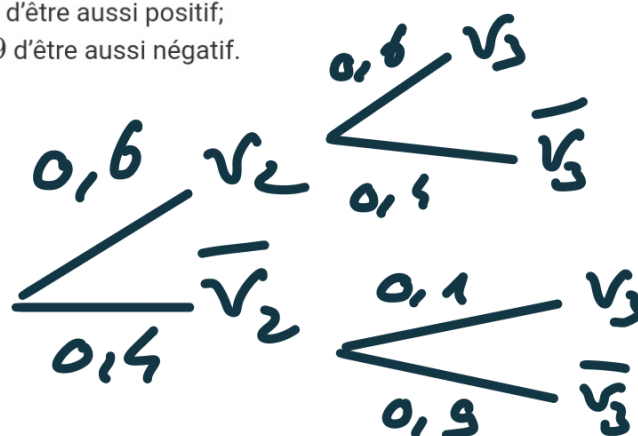
1. Calculer les probabilités des événements suivants :

- A : "les 2^e et 3^e sondages sont positifs";
- B : "les 2^e et 3^e sondages sont négatifs".

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^e sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= P(V_{n+1}) \\
 &= p_n \times 0,6 + (1-p_n) \times 0,1 \\
 &= 0,6p_n + 0,1 - 0,1p_n \\
 &= 0,5p_n + 0,1
 \end{aligned}$$

4. Pour tout entier naturel n non nul, on admet que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

a. Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

b. Exprimer p_n en fonction de n .

c. Conjecturer la valeur de la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n .

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,8 \times 0,5^{n-1}$$

$$p_n = u_n + 0,2 = 0,8 \times (0,5)^{n-1} + 0,2$$