Fonctions

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=3xe^{-0,4x}$.

La fonction dérivée de la fonction f est notée f'. ?

1) Montrer que pour tout $x\in[0\,;+\infty[$, $f'(x)=(3-1,2x)e^{-0,4x}$. >0

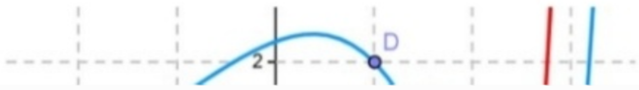
2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) Un sportif a pris un produit dopant. La fonction f modélise la quantité, en mg/L, de ce produit dopant présent dans le sang du sportif x heures après la prise.

a) Pourquoi peut-on affirmer que ce produit dopant n'est pas naturellement présent dans l'organisme du sportif ?

b) Combien de temps après son absorption, ce produit dopant sera-t-il présent en quantité maximale dans le sang du sportif ? Justifier.

c) Le sportif absorbe ce produit dopant au début d'une séance d'entraînement.
Le même jour, 6 heures après le début de cette séance d'entraînement, il est soumis à un contrôle anti-dopage. Celui-ci se révèlera positif si la quantité de produit dopant présent dans l'organisme de ce sportif dépasse 1,4 mg/L.
Ce contrôle anti-dopage sera-t-il positif ? Justifier.



1) $f'(x) = 3e^{-0,4x} - 1,2xe^{-0,4x}$

$= e^{-0,4x}(3-1,2x)$

2)

$-\frac{b}{a}$ $ax+b$

x	$-\infty$	$\frac{-3}{-1,2}=2,5$	$+\infty$
signe $3-1,2x$	$+$	0	$-$

→ brouillon

x	0		$2,5$		$+\infty$
$e^{-0,4x}$		$+$		$+$	
$3-1,2x$		$+$	0	$-$	
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(2,5) \simeq 2,759$	$\searrow$	

3) a) Comme $f(0) = 0$, alors le produit dopant n'est pas naturellement présent dans l'organisme.

b) La fonction f atteint son maximum en $x = 2,5$.

Donc 2h30 après son absorption le produit sera présent en quantité maximale.

c) $f(6) = 3 \times 6 \times e^{-0,4 \times 6}$

$\simeq 1,6 > 1,4$

Donc le test sera positif.

Exercice 2 :

Une loterie organisée par une association sportive est constituée d'un ensemble de billets numérotés de 1 à 2000. Un des billets rapporte un lot de 500 €, deux billets un lot 150 € et cinq billets un lot de 100 €.
Le prix du billet est de 2 €. On achète un billet au hasard.

X est la variable aléatoire, définie sur l'univers Ω, égale au gain algébrique procuré par le billet.

1) Déterminer les valeurs prises par X en tenant compte du prix du billet.

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

3) Calculer l'espérance mathématique de X. Qu'en concluez-vous ?

4) L'association décide de limiter le nombre de billets à un nombre x, avec x compris entre 1 et 2 000, pour que le jeu devienne équitable. Calculer x.

$\hookrightarrow E[X] = 0$

1) $X(\Omega) = \{498 ; 148 ; 98 ; -2\}$.

2)

x	-2	98	148	498
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1992}{2000} = \frac{249}{250}$	$\frac{5}{2000} = \frac{1}{400}$	$\frac{2}{2000} = \frac{1}{1000}$	$\frac{1}{2000}$

3) $$E[X] = -2 \times \frac{249}{250} + 98 \times \frac{1}{400} + 148 \times \frac{1}{1000} + 498 \times \frac{1}{2000}$$

$$= -\frac{27}{20} = -1{,}101.$$

En moyenne, les joueurs de la Loterie vont perdre 1,101 €.

4) $E[X] = 0$

$$498 \times \frac{1}{x} + 148 \times \frac{2}{x} + 98 \times \frac{5}{x} + \frac{(-2) \times (x-8)}{x} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{498 + 2 \times 148 + 5 \times 98 - 2(x-8)}{x} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1284 - 2x + 16}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1300 - 2x}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$1300 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x = -1300$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1300}{-2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = 650$$

Donc il faut 650 billets

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\bullet^2 \times P(X = \bullet) + \ldots$$