TD 9

exercice 10 :

1) $\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$

car $\mathbb{P}$ est une mesure de proba. sur $\mathbb{N}^*$.

d'où $\sum_{n \geqslant 1} \frac{a}{3^n} = 1$

$\Leftrightarrow a \underbrace{\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{3^n}}_{\text{géométrique}} = 1$

$\Leftrightarrow a \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1$

$$\iff a \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2/3} = 1$$

$$\iff a \times \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2} = 1$$

$$\iff a \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\iff a = 2$$

2) nb. impair $< 9 = \{1 ; 3 ; 5 ; 7\}$

$$\mathbb{P}(\text{nb. impair} < 9) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{7\})$$

$$= \frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^7}$$

$$= \frac{2 \times 3^6 + 2 \times 3^4 + 2 \times 3^2 + 2}{3^7}$$

$$= \frac{1\,640}{2\,187}$$

<u>méthode :</u>

$$\mathbb{P}(\text{impair} < 9) = \sum_{n=0}^{3} \frac{2}{3^{2n+1}}$$

$$= \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{3^{2n}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \sum_{n=0}^{3} \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^4}{1-\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^4}{\frac{8}{9}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{9}{8} \times 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^4$$

$$= \frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^4\right)$$

3) $\{12, 14, \ldots\ldots\}$

1) $P(\text{pair} > 10)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{12+2n}}$$

$$= \frac{2}{3^{12}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}}$$

$$= \frac{2}{3^{12}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n}$$

$$= \frac{2}{3^{12}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{2}{3^{12}} \times \frac{1}{\frac{8}{9}}$$

$$= \frac{2}{3^{12}} \times \frac{\overbrace{9}^{3^2}}{8 = 2 \times 4}$$

$$= \frac{1}{4 \times 3^{10}}$$

exercice 2 :

Supposons par l'absurde qu'il existe une telle proba.

Alors il existe un réel $a \geq 0$ tel que $\mathbb{P}(\{k\}) = a$.

or $\mathbb{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{k\}$, et

donc :

$$\mathbb{P}(\mathbb{N}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{k\})$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} a$$

mais $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$

d'où $1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} c$

→ si $c = 0$, $\mathcal{L} = 0$ impossible

→ si $c > 0$, $\mathcal{L} = +\infty$ impossible

Donc absurde, et il n'existe pas une telle proba sur $\mathbb{N}$.

exercice 3 :

1) $k \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$, alors

k appartient à tous les A_n

donc $k \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$

on prend $n = k+1$, alors

comme en particulier $k \in A_{k+1}$

et $k \geq k+1$ impossible

Donc $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset$

2) • Montrons que $A_{n+1} \subset A_n$

Soit $k \in A_{n+1}$, alors on a

$k \geq n+1 \geq n$, donc $k \geq n$

et donc $k \in A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Ainsi $A_{n+1} \subset A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donc (A_n) est décroissante.

Donc $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

$= \mathbb{P}(\emptyset)$

$= 0.$

exercice 5 :

$$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

$$\mathbb{P}(X \in \{2, 4, \dots\})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2k).$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{2k-1}$$

$$= p \times (1-p) \times \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k-2}$$

$$= p \times (1-p) \times \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left[(1-p)^2\right]^{k-1}}$$

changement d'indice
$j = k-1$.

$$= p(1-p) \times \sum_{j=0}^{\infty} \left((1-p)^2\right)^j$$

$$= p(1-p) \times \frac{1}{1-(1-p)^2}$$

$$= \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2}$$

$$= \frac{p(1-p)}{1-1+2p-p^2}$$

$$= \frac{p(1-p)}{2p-p^2} = \frac{\cancel{p}(1-p)}{\cancel{p}(2-p)}$$

$$= \frac{1-p}{2-p}.$$