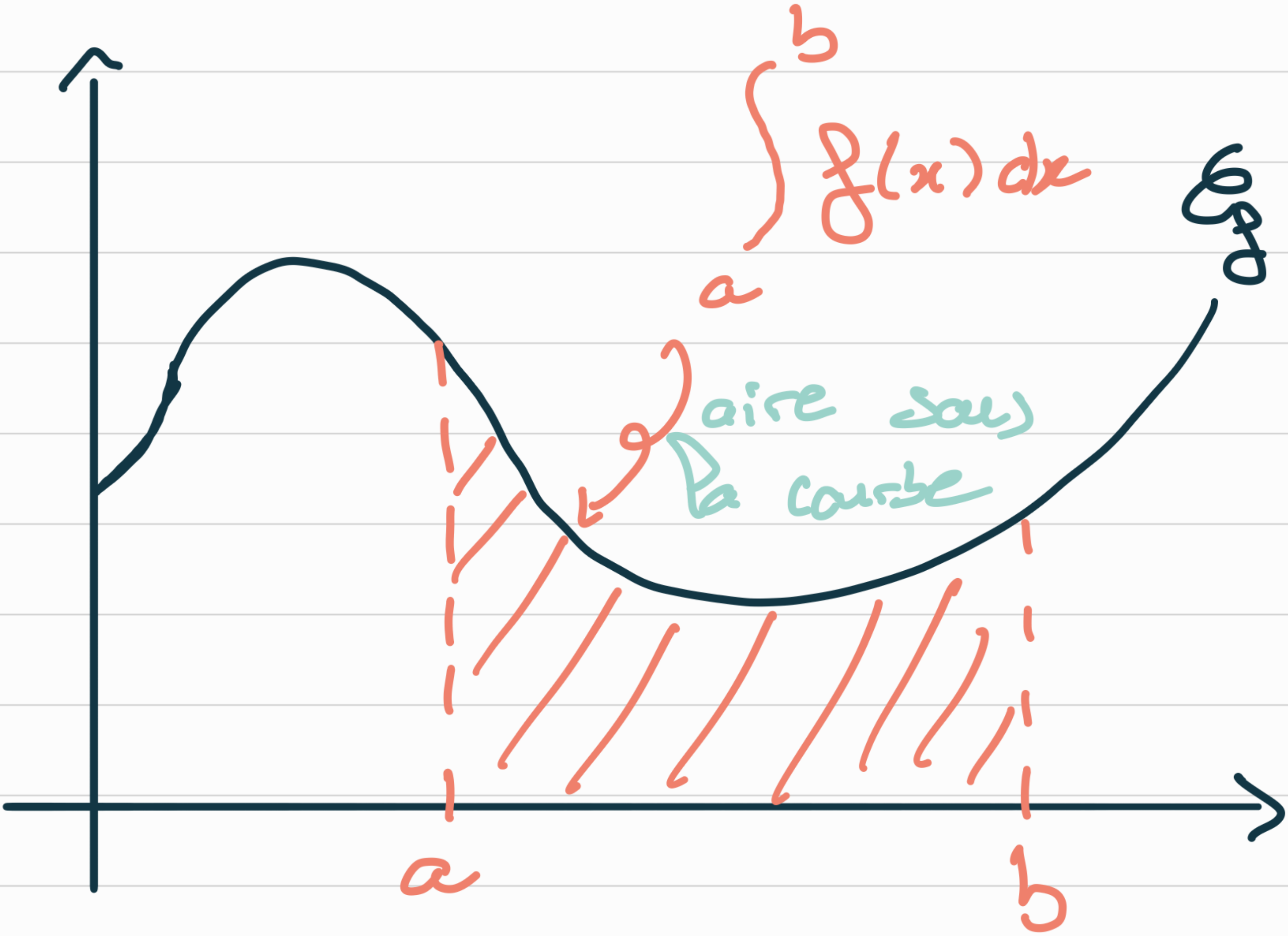
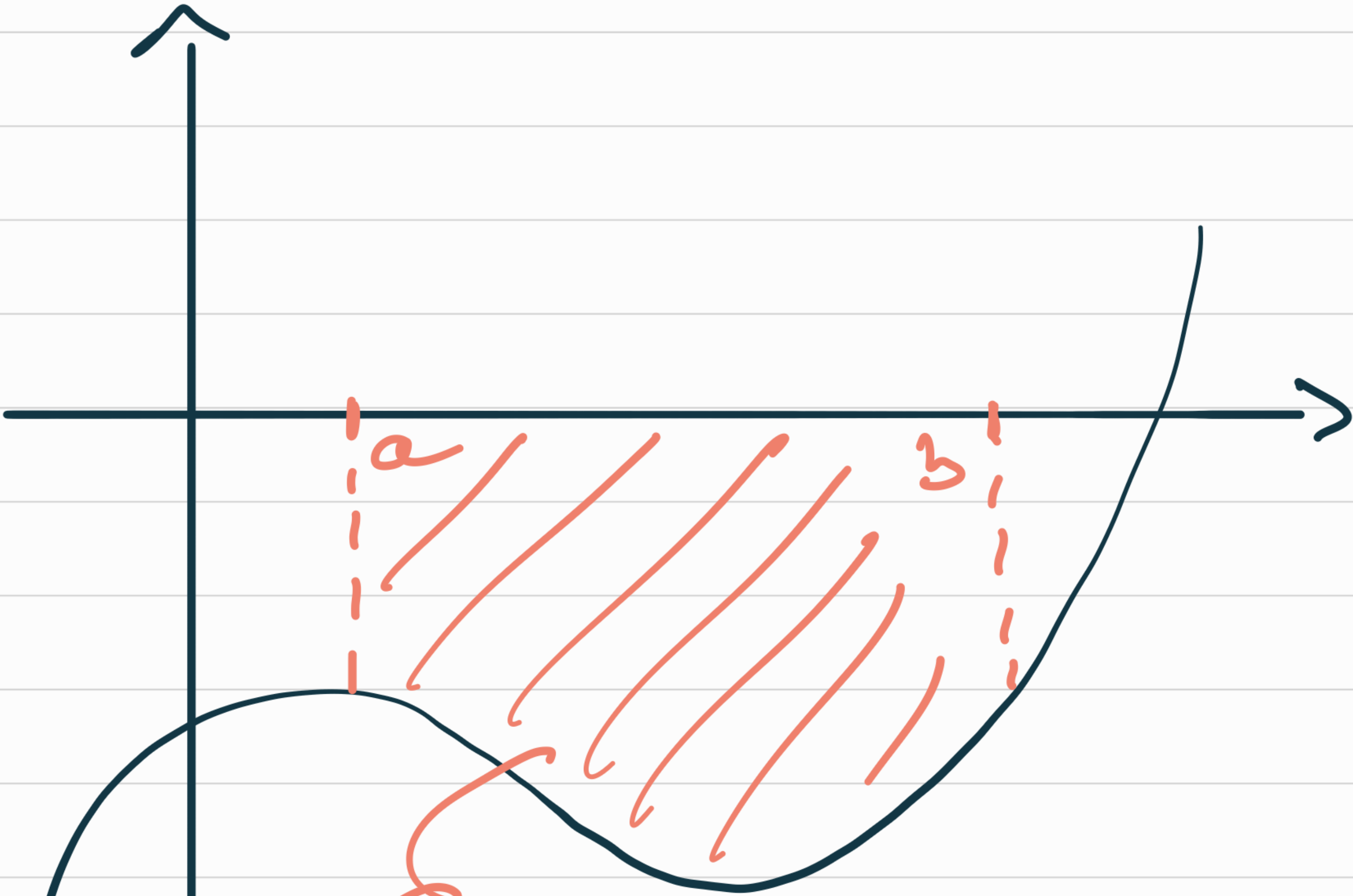
Calcul Intégral





$$-\int_a^b f(x)\,dx$$

Intégrale d'une fonction positive

1 On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2;1]$ par $f(x) = -x + 2$.

1. Comment s'appelle l'aire colorée sur la figure ? Comment se note-t-elle ? La calculer par lecture graphique.

2. Par lecture graphique, déterminer $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1) $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 7,5$ u.a

2) $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = 1,5$ u.a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\, F(x) \,\Big]_a^b$$

primitive

$$= F(b) - F(a)$$

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$.

1. Vérifier que $f(x) \geq 0$ sur $[-1;5]$.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de $I = \int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{6}x^2 + 4x$.
   a. Vérifier que $F'(x) = f(x)$.
   b. Retrouver la valeur de I.
   c. Calculer $J = \int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\bullet \int_{-1}^{5} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{5} \frac{1}{3}x + 4 \quad dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} \times \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{5}$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^2 + 4x \right]_{-1}^{5}$$

$$= \left(\frac{1}{6} \times 5^2 + 4 \times 5 \right) - \left(\frac{1}{6} \times (-1)^2 + 4 \times (-1) \right)$$

$$= \left(\frac{25}{6} + 20 \right) - \left(\frac{1}{6} - 4 \right)$$

$$= \frac{145}{6} - \left(-\frac{23}{6} \right)$$

$$= 28.$$

Prop :

- $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

- $$\int_{\underbrace{b}_{b>a}}^{a} f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

- $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\underline{c}} f(x)\,dx + \int_{\underline{c}}^{b} f(x)\,dx$$

- $$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

- $$\int_a^b k f(x)\,dx = k\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

- si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x) \geqslant 0$.

- si $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[a;b]$, alors $$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

11 Dans chacun des cas suivants, démontrer que F est une primitive de f.

a. $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ $\quad F(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

b. $f(x) = 5 - x$ $\quad F(x) = 5x - \frac{1}{2}x^2$

c. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{x}$ $\quad F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^4}{4} + \ln x$

21 Calculer les intégrales suivantes.

a. $I = \int_{-1}^{3} 4x \, dx$ $\quad$ b. $I = \int_{-2}^{6} x^2 \, dx$

c. $I = \int_{5}^{2} (x^2 + 1) \, dx$ $\quad$ d. $I = \int_{-2}^{3} e^x \, dx$

e. $I = \int_{0}^{3} e^{-x} \, dx$ $\quad$ f. $I = \int_{1}^{4} \frac{2}{x} \, dx$

g. $I = \int_{-2}^{2} (x^3 + 2x) \, dx$ $\quad$ h. $I = \int_{2}^{4} \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) dx$

$I = \int_{-1}^{3} 4x \, dx$

$= \left[2x^2\right]_{-1}^{3}$

$= 18 - 2$

$= 16$

15 Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

a. $f(x) = e^x + x$

b. $f(x) = e^{-x}$

c. $f(x) = 3e^{3x} + 1$

d. $f(x) = e^{-3x}$

e. $f(x) = e^{2x-1}$

f. $f(x) = 2xe^{x^2}$

g. $f(x) = 3x^2e^{x^3}$

h. $f(x) = (2x + 1)e^{x^2+x}$