Worksheet 3.4

exercice 1 :

$$p : E \longrightarrow F$$

$$x = f + g \longmapsto f.$$

Les valeurs propres de p sont 0 et 1.

$\Leftrightarrow$ $\boxed{p(x) = \lambda x \quad , \quad x \neq 0}$

$p^2 = p$

$$p^2(x) = p(\lambda x)$$

$$p(x) = \lambda p(x)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda x = \lambda^2 x$$

$(\lambda - \lambda^2)x = 0$

$\lambda(1-\lambda) = 0$, car $x \neq 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

exercice 3 :

Spectre (f) = { valeurs propres }

. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$

$$f(P+Q) = (X+1)(X-3)(P+Q)' - X(P+Q)$$

$$= (X+1)(X-3)(P'+Q')$$

$$- XP - XQ$$

$$= (X+1)(X-3)P' + (X+1)(X-3)Q'$$

$$- XP - XQ$$

$$= \big((X+1)(X-3)P' - XP\big)$$

$$- \big((X+1)(X-3)Q' - XQ\big).$$

$$= f(P) + f(Q)$$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$

$$f(\lambda P) = \lambda f(P).$$

Donc f est linéaire.

De plus, $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$

donc f est un endomorphisme

- on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(P) = \lambda P \quad , \quad P \neq 0 .$$

soit $\deg(P) = n$, alors :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$P'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + a_1$$

donc :

$$f(P) = (X+1)(X-3)P' - XP$$

$$= \underbrace{(X^2 - 2X - 3)P'}_{= n a_n X^{n+1} + \dots} - \underbrace{XP}_{a_n X^{n+1} + \dots}$$

$$= (n-1)\underbrace{a_n}_{\neq 0} X^{n+1} + \dots$$

deg $n+1$

deg n

or $f(P) = \lambda P$, donc

$$n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$$

Donc tout vecteur propre est de la forme $aX + b$.

$$f(P) = (X^2 - 2X - 3) \times a - X(aX+b)$$

$$= aX^2 - 2aX - 3a - aX^2 - bX$$

$$= (-2a-b)X - 3a$$

$$f(P) = \lambda(aX+b) = \lambda aX + \lambda b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a-b = \lambda a \\ -3a = \lambda b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2-\lambda)a - b = 0 \\ -3a - \lambda b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

$S = \{1 ; -3\}$.

exercice 4 :

1) on cherche λ tel que $f(x) = \lambda x$, $x \neq 0$

$$(f^3 - f^2 + f - id_E)(x) = 0$$

$$f^3(x) - f^2(x) + f(x) - id_E(x) = 0$$

$$\lambda^3 x - \lambda^2 x + \lambda x - x = 0$$

$$x(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1) = 0$$

or $\underline{x \neq 0}$, donc :

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$\underbrace{(\lambda - 1)(\lambda^2 + 0\lambda + 1)}_{\lambda^3 + \lambda - \lambda^2 - 1} = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

- dans $\mathbb{R}$: $\{1\}$
- dans $\mathbb{C}$: $\{1 ; -i ; i\}$

2) $f^3 - f^2 + f - id_E = 0$

$$f^3 - f^2 + f = id_E$$

$$f \circ \underbrace{(f^2 - f + id_E)}_{\text{application linéaire}} = id_E$$

donc f est inversible et son inverse est donné par :

$$f^{-1} = f^2 - f + id_E .$$