

Exercice 4 6 points

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite. Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}$$

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $] - \infty; 5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $] - \infty; 5[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

3. a. Soit x un réel de l'intervalle $] - \infty; 5[$.
Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

- b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $] - \infty; 5[$.
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
Déterminer sa limite.

2)

On considère la propriété
 $P_n: "1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}"$.

Initialisation:

D'une part, $u_0 = 3$ et

$$u_1 = \frac{4}{3 - u_0} = \frac{4}{3 - 3} = \frac{4}{2} = 2$$

D'autre part, $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$.

donc la propriété est vraie
au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons P_n
propriété vraie pour un certain
rang n , c'est-à-dire : $1 \leq u_{n+1} \leq$
 $u_n \leq 4$.

Démontrons que P_n propriété est
vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire
 $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$.

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4 \rightarrow \text{hypothèse}$$

or $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et f
est croissante sur $]-\infty; 5[$.

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(4)$$

$$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est initialisée au rang $n=0$ et est héréditaire à partir de ce rang.

Donc d'après le principe de récurrence, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$.

3) a) $f(x) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5-x} = x$$

$$\Leftrightarrow 4 = x(5-x)$$

$$\Leftrightarrow 4 = 5x - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \times 1}$$

$$= 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 4$$

4) La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$, donc elle converge.

• Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et f continue sur $]-\frac{1}{2}; 5[$, alors la limite l vérifie

$$f(l) = l \Rightarrow l = \frac{1}{2} \text{ ou } l = 4$$

or $u_0 = 3$ et (u_n) est décroissante.

Donc $l = \frac{1}{2}$