Equations Différentielles

1. Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation.

exemple : $y' = 6x + \frac{1}{x}$

vérifier que la fonction $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est une solution.

- $g'(x) = 6x + \frac{1}{x}$

donc g est solution.

2 Equation $y' = ay + b$

$y' = ay \Rightarrow y(x) = ke^{ax}, \quad \underline{k \in \mathbb{R}}$

$y' = ay + b \Rightarrow y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}, \quad \underline{k \in \mathbb{R}}$

<u>exemple</u> : résoudre l'équation $2y' - y = 3$.

$2y' - y = 3 \Leftrightarrow y' - \frac{y}{2} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$

donc les solutions :

$$y(x) = k e^{\frac{1}{2}x} - \frac{3/2}{1/2} \, , \, k \in \mathbb{R}$$

$$= k e^{\frac{x}{2}} - 3 \, , \, k \in \mathbb{R}$$

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle.

1. $y' - 2y = 0$ $\Leftrightarrow y' = 2y$ / $y(x) = k e^{2x}$, $k \in \mathbb{R}$
2. $-y' + y = 0$ $\Leftrightarrow y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = y$ / $y(x) = k e^{x}$, $k \in \mathbb{R}$
3. $7y' + 8y = 0$ $\Leftrightarrow y' = -\frac{8}{7} y$ / $y(x) = k e^{-8/7 x}$, $k \in \mathbb{R}$

Exercice 2

Mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$ (a et b réels) et la résoudre.

1. $y' + 2y = 3$ $\Leftrightarrow y' = -2y + 3$ / $y(x) = k e^{-2x} - \frac{3}{-2}$, $k \in \mathbb{R}$
   $y(x) = k e^{-2x} + \frac{3}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.
2. $y' - 5 = y$ $\Leftrightarrow y' = y + 5$ / $y(x) = k e^{x} - 5$, $k \in \mathbb{R}$
3. $3y' - 2y + 1 = 0$ $\rightsquigarrow$ $y(x) = k e^{\frac{2}{3}x} - \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{R}$
4. $\sqrt{2}y' = 2y - 4$
   $\frac{2}{\sqrt{2}}$ $\frac{4}{\sqrt{2}}$
   $\frac{-(-4/\sqrt{2})}{2/\sqrt{2}}$
   $= \frac{4}{2} = 2$

Exercice 3

Déterminer la solution de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale proposée.

1. $y' = 2y$; $y(0) = 1$
2. $y' = 4y - 3$; $y(0) = -1$
3. $y' = -y + 1$; $y(2) = 6$

$\rightarrow y(x) = k e^{2x}, k \in \mathbb{R}$

$y(0) = k e^{2\times 0} = k \times 1 = k$

or $y(0) = 1 \Rightarrow k = 1$

donc l'unique solution

$y(x) = 1 \times e^{2x} = e^{2x}$

$\hookrightarrow y(x) = \underset{5e^2}{k} e^{-x} - 1, k \in \mathbb{R}$

$y(2) = k e^{-2} - 1 = 6$

$k e^{-2} = 6 - 1 = 5$

$k = \frac{5}{e^{-2}} = 5e^2$

$y(x) = k e^{4x} + \frac{3}{4}$

$\hookrightarrow y(0) = k e^{0} + \frac{3}{4} = k + \frac{3}{4}$

$y(0) = -1 \iff k + \frac{3}{4} = -1$

$\iff k = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$

$\Rightarrow y(x) = -\frac{7}{4} e^{4x} + \frac{3}{4}$

Notion d'équation différentielle

▶ **Exercice 1 – Voir le corrigé**

$f' = 3f - 3$?

Montrer que $f : x \mapsto e^{3x} + 1$ est solution de l'équation différentielle $y' = 3y - 3$.

▶ **Exercice 2 – Voir le corrigé**

$(1+x)f' + f = 0$?

Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est solution de l'équation différentielle $(1+x)y' + y = 0$ sur $]-1;+\infty[$.

▶ **Exercice 3 – Voir le corrigé**

Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ est solution de l'équation différentielle $y' = y(1-y)$.

▶ **Exercice 4 – Voir le corrigé**

Soit λ et μ des réels. Montrer que $f : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.

1) $f(x) = e^{3x} + 1$

$f'(x) = 3e^{3x}$

$$3f(x) - 3 = 3(e^{3x} + 1) - 3$$
$$= 3e^{3x} + 3 - 3$$
$$= 3e^{3x}$$
$$= f'(x)$$

donc f vérifie $y' = 3y - 3$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $\dashrightarrow \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$(1+x)f'(x) + f(x)$$

$$= (1+x) \times \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}$$

$$= -\frac{\cancel{(1+x)}}{(1+x)^{\cancel{2}}} + \frac{1}{1+x}$$

$$= -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x} = 0$$