# Primitives

## exercice :

- $f(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 - 4x + 3$

$\hookrightarrow F(x) = \dfrac{x^5}{5} + x^4 + \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$

- $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1$

$\hookrightarrow F(x) = -\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right) - \dfrac{4}{x} - x$

• $f(x) = \frac{4}{x} + 2e^{x}$

$\hookrightarrow F(x) = 4\ln(x) + 2e^{x}$

? $u' = 3$

• $f(x) = (3x+2)^{3}$

$\hookrightarrow F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(3x+2)^{4}}{4}$

✓

• $f(x) = \frac{2x-1}{x^{2}-x}$ $u' = 2x-1$

$\hookrightarrow F(x) = \ln(x^{2}-x).$

- $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^3}$

$u' = 1$

$\hookrightarrow F(x) = 2 \times \dfrac{-1}{2(x+4)^2}$

$= -\dfrac{2}{2(x+4)^2}$

$u' = -1$

- $f(x) = e^{-x+1}$

$\hookrightarrow F(x) = -e^{-x+1}.$

## Exercices 2: Vérifier qu'une fonction F est une primitive de f

On considère les fonctions $F$ et $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{3}(2x+1)^3$ et $f(x) = (2x+1)^2$.
$F$ est-elle une primitive de $f$? Justifier.

$$F'(x) = \frac{1}{3} \times 3 \times 2 \times (2x+)^2$$

$$= 2(2x+1)^2$$

$$\neq f(x)$$

Donc $F$ n'est pas une primitive.

**Exercice 4** Déterminer la primitive $F$ de :

**1.** $f : x \mapsto e^{2x+4}$ qui vérifie $F(3) = 5$.

**2.** $f : x \mapsto (4x^3 - 10x)(-x^4 + 5x^2 + 10)^3$ qui s'annule en 2.

1) $f(x) = e^{2x+4}$ $\quad u' = 2$

- $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+4} + C$

- $F(3) = \frac{1}{2} e^{10} + C$

$F(3) = 5 \iff \frac{1}{3} e^{10} + C = 5$

$\Rightarrow C = 5 - \frac{1}{2} e^{10}$

donc $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+4} + 5 - \frac{1}{2} e^{10}$.

- $y' = ay \Rightarrow y(x) = ke^{ax}, k \in \mathbb{R}$

- $y' = ay + b \Rightarrow y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}, k \in \mathbb{R}$

## Exercice 3

Déterminer la solution de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale proposée.

1. $y' = 2y\,;\, y(0) = 1$
2. $y' = 4y - 3\,;\, y(0) = -1$
3. $y' = -y + 1\,;\, y(2) = 6$

1) $y(x) = ke^{2x}, k \in \mathbb{R}$.

$y(0) = ke^{2\times 0} = k = 1$

donc $y(x) = e^{2x}$.

## Exercice 2

Mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$ ($a$ et $b$ réels) et la résoudre.

1. $y' + 2y = 3$

2. $y' - 5 = y$

3. $3y' - 2y + 1 = 0$

4. $\sqrt{2}y' = 2y - 4$

3) $3y' - 2y + 1 = 0$

$3y' = 2y - 1$

$y' = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}$

$\Rightarrow y(x) = ke^{\frac{2}{3}x} - \left(\frac{-1/3}{2/3}\right)$

$= ke^{\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{R}$

**Partie A**

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

• $y' + 2y = 0$

$y' = -2y$

$\Rightarrow y(x) = k e^{-2x}, \; k \in \mathbb{R}.$

3) Vérifier que $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de (E).

$g'(x) = -3x - 3e^{-3x} = 9e^{-3x}$

$g'(x) + 2g(x) = 9e^{-3x} + 2x - 3e^{-3x}$

$= 9e^{-3x} - 6e^{-3x}$

$= 3e^{-3x}$

donc $g$ est solution.

$$y' + ay = f$$

$$\Rightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y' + ay = 0$$

la solution testée

$$\Rightarrow y(x) = k e^{-2x} - 3e^{-3x},\ k \in \mathbb{R}$$