exercice 2

1) • $f'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$= \dfrac{-4 - (-1)}{0 - 1}$

$= \dfrac{-3}{-1}$

$= 3$

• $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$= 3(x - 1) - 1$

$= 3x - 3 - 1$

donc $\boxed{y = 3x - 4}$

2) . f semble concave sur $]0 ; 1]$ et convexe sur $[1 ; +\infty[$

. Le point A semble être un point d'inflexion.

Partie B :

1) $f(x) = x\ln(x^2) - \frac{1}{x}$

. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$,

et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$.

donc par composition de limites

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2) = +\infty.$$

De plus, par produit de limites :

$$\lim_{x \to +\infty} x\ln(x^2) = +\infty.$$

Et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc

par somme de limites $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

Par croissance comparée,

$$\lim_{x \to 0^+} x\ln(x^2) = 0.$$

De plus, $\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$

Donc par somme de limites,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

2) a) $f(x) = \underbrace{x \ln(x^2)}_{u \times v} - \frac{1}{x}$ $\quad \ln(u)$

$$f'(x) = 1 \times \ln(x^2) + \cancel{x} \times \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x^2}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$= 2\ln(x) + 2 + \frac{1}{x^2}.$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

b) $f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3}$

$$= \frac{2 \times x^2}{x^3} - \frac{2}{x^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 2}{x^3}$$

$$= \frac{2(x^2 - 1)}{x^3}$$

$$= \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$$

3) a)

$$f''(x) = \frac{\overset{>0}{2}\overbrace{(x+1)}^{>0}\overset{?}{(x-1)}}{\underset{>0}{x^3}}$$

$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$

x		1	
f''	$-$	0	$+$

donc $f''(x) \geq 0 \iff x \geq 1$.

car x, $x+1 \geq 0$ sur $]0;+\infty[$

Ainsi f est concave sur $]0;1]$ et f est convexe sur $[1;+\infty[$.

b) Comme $f''(x) \geq 0$ sur $[1;+\infty[$, alors f' est croissante sur $[1;+\infty[$ et comme $f''(x) \leq 0$ sur $]0;1]$, alors f' est décroissante sur $]0;1]$.

$f'(1) = 2\ln(1) + 2 + \frac{1}{1^2} = 3$.

c)

x	0		1		$+\infty$
f'		$\searrow$	3	$\nearrow$	

Comme f' est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$, alors f' admet un minimum en $x = 1$.

or $f'(1) = 3 > 0$, donc f' est strictement positive sur $]0;+\infty[$.

D'où f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

4) a) • f est continue sur $]0;+\infty[$

• f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > 0$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty < 0$

donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$.

b) $\alpha \simeq 1,33$

$\bullet \quad f(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2 \ln(\alpha^2) - 1}{\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 \ln(\alpha^2) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 \ln(\alpha^2) = 1$

$\Leftrightarrow \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}$

$\Leftrightarrow \alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$