

exercice 2

$$1). f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$= \frac{-4 - (-1)}{0 - 1}$$

$$= \frac{-3}{-1}$$

$$= 3$$

$$\bullet y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$= 3(x-1) - 1$$

$$= 3x - 3 - 1$$

donc

$$g = 3x - 4$$

2) f semble concave sur $]0; 1]$ et convexe sur $[1; +\infty[$

Le point A semble être un point d'inflexion.

Partie B:

1) $f(x) = x \ln(x^2) - \frac{1}{x}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$,

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

donc par composition de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x^2) = +\infty.$$

De plus, par produit de limites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x^2) = +\infty.$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ donc}$$

par somme de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Par croissance comparée,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x^2) = 0.$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$$

Donc par somme de limites,

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$$

a) $f(x) = x \ln(x^2) - \frac{1}{x}$

(Note: A red bracket under $x \ln(x^2)$ is labeled $u \times v$ in red, and $\ln(x^2)$ is circled in green.)

$$f'(x) = 1 \times \ln(x^2) + \cancel{x} \times \frac{2x}{\cancel{x^2}} - \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$= 2 \ln(x) + 2 + \frac{1}{x^2}$$

b) $f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3}$

(Note: A red derivative rule is shown: $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$)

$$= \frac{2 \times x^2}{x^3} - \frac{2}{x^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 2}{x^3}$$

$$= \frac{2(x^2 - 1)}{x^3}$$

$$= \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$$

3) a) $f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$

Handwritten annotations: red arrows pointing to $x+1$ and $x-1$ with >0 above them; a red arrow pointing to x^3 with >0 below it; a green circle around $(x-1)$ and a green question mark above it.

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\frac{x^2}{3^x} \Big| \begin{array}{c} 1 \\ - \\ 1 \\ + \end{array}$$

donc $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

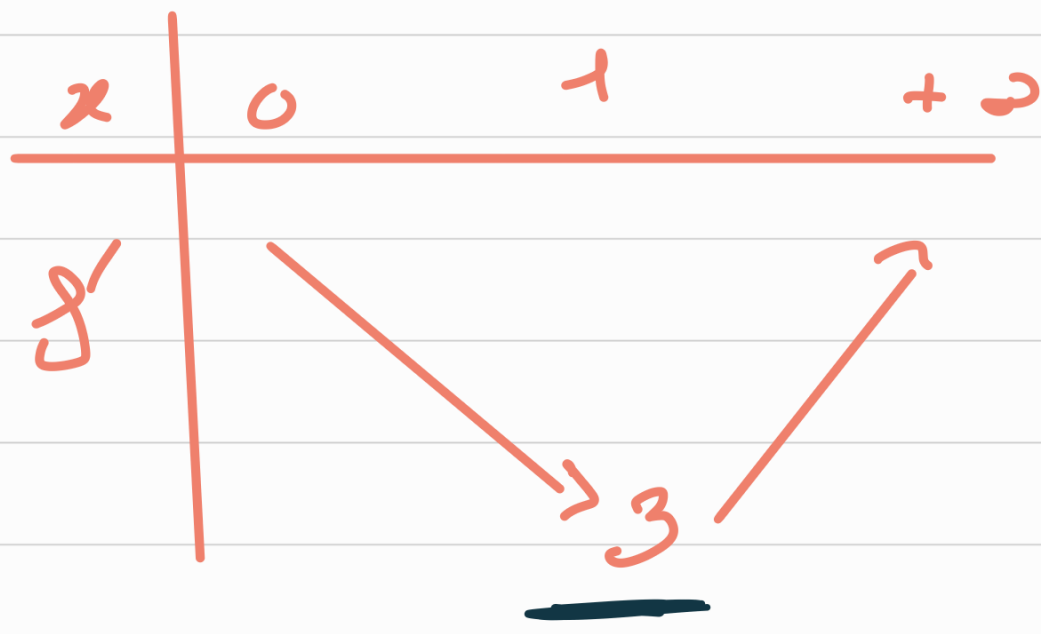
car $x, x+1 \geq 0$ sur $]0; +\infty[$

Ainsi f est concave sur $]0; 1]$ et f est convexe sur $[1; +\infty[$.

b) Comme $f''(x) \geq 0$ sur $[1; +\infty[$, alors f' est croissante sur $[1; +\infty[$ et comme $f''(x) \leq 0$ sur $]0; 1]$, alors f' est décroissante sur $]0; 1]$.

$$f'(1) = 2D_n(1) + 2 + \frac{1}{1^2} = 3.$$

C)



Comme f' est décroissante sur $]0; 1[$ et croissante sur $]1; +\infty[$, alors f' admet un minimum en $x = 1$.

or $f'(1) = 3 > 0$, donc

f' est strictement positive sur $]0; +\infty[$.

D'où f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

4) a) f est continue sur $]0; +\infty[$

f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty < 0$$

donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.

$$\alpha \approx 1,33$$

$$\cdot f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \ln(x^2) - \frac{1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 \ln(x^2) - 1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \ln(x^2) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \ln(x^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2) = \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \exp\left(\frac{1}{x^2}\right).$$