# Feuille 3

## exercice 6 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} L_1-2L_2 \\ \\ L_3+L_2 \end{array}$$

$$\vdots$$

# exercice 5 : $f : E \to F$

$M_{B_2}^{B_1}(f)$ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

↳ matrice de $f$ avec $B_1$ base de l'espace de départ et $B_2$ base de l'espace d'arrivée.

↳ $\{v_1, v_2, v_3\}$.

$$\begin{array}{cccc|l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & & & & \begin{array}{l} \to v_1 \\ \to v_2 \\ \to v_3 \end{array} \\ f(u_1) \quad f(u_2) \quad f(u_3) \quad f(u_4) & & & & \end{array}$$

$$f(u_1) = 1 \times v_1 + 2 \times v_2 - 1 \times v_3$$

exemple :

$$f(x,y,z) = (2x - y + z,\ 3x + y - 2z,\ x + y - z).$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$$
$$= \{(1,0,0) ; (0,1,0) ; (0,0,1)\}$$

(i) $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$.

$E = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

donc $u \in E$, et en termes de coordonnées dans la base $\mathcal{B}_1$.

$$\Rightarrow \quad u = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(f)} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}}_{u}$$

d'où $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(f) \times u \Rightarrow f(u)$

image de $u$ par $f$ dans $\mathcal{B}_2$

$$\boxed{\begin{array}{l} M(f) \times M(g) \Rightarrow f \circ g \\ M(f) \times u \Rightarrow f(u) \end{array}}$$

$$f(u) = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 ; \; 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 ; \; -\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4)$$

## exercice 3 :

(i) • Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$d(P+Q) = (P+Q)'$$

$$= P' + Q'$$

$$= d(P) + d(Q).$$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$d(\lambda P) = (\lambda P)'$$

$$= \lambda P'$$

$$= \lambda d(P)$$

donc $d$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

(ii) $\ker(d) = \{ P \in \mathbb{R}[X] : d(P) = 0 \}$

?

$d(P) = 0 \Rightarrow P' = 0$ → polynôme nul

$\Rightarrow P = a_0$

donc $\ker(d) = \{ a_0 : a_0 \in \mathbb{R} \}$

$= \mathbb{R}$

$$\boxed{\ker(f) = \{ x \in E : f(x) = 0_F \}}$$

Donc $\ker(d)$ est un e.v de dim 1, et une base est $\mathcal{B} = \{1\}$

$$\boxed{\mathbb{R}[X] = \{1, X, X^2, X^3, \dots\}}$$

(iii) $f$ est surjective si

$\mathrm{Im}(f) = F$

$\Leftrightarrow$

$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$

Soit $\overset{y}{Q} \in \overset{F}{\mathbb{R}[X]}$.

on cherche $\overset{x}{P} \in \overset{E}{\mathbb{R}[X]}$, tel que $d(P) = Q$.

$g'$ $\quad x \quad$ $g$

on prend $Q(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$
par $n \in \mathbb{N}$.

$$d(P) = Q$$

$$P' = Q$$

$$P' = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$$

on pose

$$P(X) = a_0X + \frac{a_1X^2}{2} + \dots + \frac{a_nX^{n+1}}{n+1}$$

Ainsi, $P \in \mathbb{R}[X]$ et $P' = Q$.

Donc :

$\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, $\exists P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $d(P) = Q$.

donc $d$ est surjective.