exercice 2 :

Partie A :

1) $g(1) = 2(1-1) - 1 \times \ln(1)$

$= 0 - 0 = 0$

$g(e) = 2(e-1) - e\ln(e)$

$= 2e - 2 - e \times 1$

$= e - 2$

2) $g(x) = 2(\underbrace{x-1}_{2(0-1)}) - x\ln(x)$

$2(0-1) - 0 \times -\infty$

Par croissance comparée,

$$\lim_{x \to 0} x \ln(x) = 0$$

De plus, $\lim_{x \to 0} 2(x-1) = -2$

donc par somme de limites
on a $\lim_{x \to 0} g(x) = -2$.

3) $g'(x) = 2 - (\ln(x) + 1)$

$= 2 - \ln(x) - 1$

$= 1 - \ln(x)$

• $1 - \ln(x) \geq 0 \iff 1 \geq \ln(x)$

$\Leftrightarrow e^{1} \geqslant x$

x	0		1		e		α		$+\infty$
g'		$+$			0		$-$		
g					$e-2 \simeq 0{,}72$				
		$-$ ↗	0	$+$		↘	0	$-$	
	-2								$-\infty$

4) • g est continue sur $]0;e]$

• g est strictement croissante sur $]0;e]$

- $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -2 < 0$

et $g(e) \simeq 0{,}72 > 0$

donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;e]$.

or $g(1) = 0$, donc 1 est l'unique solution sur $]0;e]$.

- g est continue sur $[e;+\infty[$

- g est strictement décroissante sur $[e;+\infty[$.

- $g(e) \simeq 0{,}72 > 0$
  et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty < 0$

donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[e; +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0; +\infty[$ 1 et $\alpha \in [e; +\infty[$.

De plus, $4{,}92 \leq \alpha \leq 4{,}93$

5)

x	0		1		α		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	0	$-$	

Partie B :

1) $f(x) = \underbrace{\underbrace{3x}_{+\infty} - \underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{\ln(x)}_{+\infty}}_{+\infty - \infty} - \underbrace{2\ln(x)}_{-\infty}$

$$= x\left(3 - \ln(x) - \frac{2\ln(x)}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} 3 - \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{2\ln(x)}{x} = 0$$, par croissances comparées.

donc $\lim_{x \to +\infty} \left(3 - \ln(x) - \frac{2\ln(x)}{x}\right) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Donc par produit de limites on a ;

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$