Probabilités

exercice 41 :

1) « $X = 2$ » : on obtient pour la première fois deux piles consécutifs au bout de deux lancers

$\mathcal{E}_3$ $P_1 P_2$

$$P_2 = \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(P_1, P_2)$$

$$= \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{9}$$

- $X = 3$ - : on obtient pour la première fois deux piles consécutifs au bout de trois lancers.

E_3 : $F_1 P_2 P_3$

$$P_3 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

- $X = 4$ - : on obtient pour la première fois deux piles consécutifs au bout de quatre lancers.

E_3 : $F_1 F_2 P_3 P_4 \cup P_1 F_2 P_3 P_4$

$$P_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{81} + \frac{8}{81} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$$

2) on cherche $X = n$

→ on commence par P_1. alors après F_2, après il reste $n-2$ lancers tels que on veut avoir le double pile au bout du $n-2$-ième lancer.

$$\varepsilon : \underset{\overset{\downarrow}{\frac{2}{3}}}{P_1}\ \underset{\overset{\downarrow}{\frac{1}{2}}}{F_2}\ \underbrace{\cdots\cdots P_{n-1}\, P_n}_{\substack{n-2 \\ \downarrow \\ P_{n-2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9} P_{n-2}$$

→ on commence par F_1, alors il reste $n-1$ lancers et on veut qu'au bout des $n-1$ lancers on ait deux piles.

E) $F_1 \underbrace{\cdot \cdot \cdot \cdot \; P_{n-1}}_{n-1} P_n$

$\downarrow$ $\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\downarrow$ P_{n-1}

$\Rightarrow \frac{1}{3} P_{n-1}$

donc : $P_n = \frac{2}{9} P_{n-2} + \frac{1}{3} P_{n-1}$.

3) $P_n = \frac{2}{9} P_{n-2} + \frac{1}{3} P_{n-1}$

E) $r^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} r$

$r^2 - \frac{1}{3} r - \frac{2}{9} = 0$

$r = -\frac{1}{3}$ ou $r = \frac{2}{3}$.

$$\boxed{P_n = \lambda\left(\frac{-1}{3}\right)^n + \mu\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$P_2 = \lambda\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \mu\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{\lambda}{9} + \frac{4}{9}\mu = \frac{4}{9}$$

$$P_3 = \lambda\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \mu\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$= -\frac{\lambda}{27} + \frac{8}{27}\mu = \frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\lambda}{9} + \frac{4}{9}\mu = \frac{4}{9} \\ -\frac{\lambda}{27} + \frac{8}{27}\mu = \frac{4}{27} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + 4\mu = 4 \\ -\lambda + 8\mu = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{2}{3}$$

donc :

$$\boxed{P_n = \frac{4}{3} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

4)

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} n q^n = \frac{q}{(1-q)^2}}$$

$$E[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \mathbb{P}(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \times P_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \times \left[\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$= \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{-1/3}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2} + \frac{2}{3} \times \frac{2/3}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{15}{4}.$$

exercice 43 :

1) $\mathbb{P}(\inf(u,v) \geq t)$

or $\inf(u,v) \leq u$ et v

donc u et $v \geq \inf(u,v) \geq t$

doc :

$\mathbb{P}(\inf(u,v) \geq t)$

$= \mathbb{P}(u \geq t, v \geq t)$

$= \mathbb{P}(u \geq t) \times \mathbb{P}(v \geq t).$

or $\mathbb{P}(u \geq t) = 1 - \mathbb{P}(u < t)$

$= 1 - F_u(t)$

or $F_U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \in [0;1] \\ 1 & t > 1 \end{cases}$

Ainsi $\underbrace{1 - F_U(t)}_{\mathbb{P}(U \geqslant t)} = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 1-t & t \in [0;1] \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

Donc :

$\mathbb{P}(\inf(U,V) \geqslant t)$

$= \mathbb{P}(U \geqslant t) \times \mathbb{P}(V \geqslant t)$

$= \mathbb{P}(U \geqslant t)^2$

$= \begin{cases} 1 & t < 0 \\ (1-t)^2 & t \in [0;1] \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

2) $F_{\inf(U,V)}(t)$

$$= \mathbb{P}(\inf(U,V) \leq t)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\inf(U,V) \geq t)$$

$$= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1-(1-t)^2 & t \in [0;1] \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t - t^2 & t \in [0;1] \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

exercice 44 :

1) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$F_{\sup(U,V)}(t) = \mathbb{P}(\sup(U,V) \leq t)$$

or $U, V \leq \sup(U,V) \leq t$

$$= \mathbb{P}(U \leq t, V \leq t)$$

$$= \mathbb{P}(U \leq t) \times \mathbb{P}(V \leq t)$$

$$= \mathbb{P}(U \leq t)^2$$

$$= F_U(t)^2$$

u^n

$$= \begin{cases} (1 - e^{-t})^2 & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

donc la fonction de densité est :

$$f_{\sup(U,V)}(t) = \left(\overbrace{2}^{n} \times \overbrace{-(-1) \times e^{-t}}^{u'} \times \underbrace{(1-e^{-t})}_{u^{n-1}}\right) \mathbb{1}_{t \geq 0}$$

$$= \underbrace{2e^{-t}(1-e^{-t}) \mathbb{1}_{t \geq 0}}_{\text{Loi}}$$