Probabilités

exercice 44 :

2) Soit f une fonction mesurable positive.

$$E[f(U+V)] = \int_{\mathbb{R}^2} f(u+v) \times e^{-u} \times e^{-v} \mathbb{1}_{u \geq 0, v \geq 0} \, du \, dv$$

X et Y indépendantes $\Longleftrightarrow$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y).$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(u+v) \, e^{-(u+v)} \, du \, dv$$

on pose $x = u + v$

$dx = du$ choisi x p/r à u

$$= \int_{\underset{v}{0}}^{+\infty} \int_{\underset{x}{v}}^{+\infty} f(x)\, e^{-x}\, dx\, dv$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-x}\, \mathbb{1}_{x \geq v}\, dx\, dv$$

$$= \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-x} \left(\int_0^{x} dv \right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} f(x)\, x e^{-x}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \underbrace{x e^{-x} \mathbb{1}_{x \geq 0}}_{\text{densité de } U+V.} dx$$

<u>remarque</u> : $U \sim \mathcal{E}(1)$

et $V \sim \mathcal{E}(1)$

$$f_{U+V}(x) = (f_U * f_V)(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_U(y) f_V(x-y) \, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-y} \mathbb{1}_{y \geq 0} \, e^{-(x-y)} \mathbb{1}_{x-y \geq 0} \, dy.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cancel{e^{-y}}\, e^{-x}\, \cancel{e^{y}}\, \mathbb{1}_{y \geq 0}\, \mathbb{1}_{x \geq y \geq 0}\, dy$$

$$= e^{-x}\, \mathbb{1}_{x \geq 0} \int_0^x dy$$

$$= e^{-x} \times x\, \mathbb{1}_{x \geq 0}$$

exercice 45 :

1) $|f(x) - f(x_n)|$

$\leq C \times \inf(1, |x - x_n|)$

or $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} x$, alors

$|x_n - x| \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$.

donc $\inf(1, |x - x_n|) \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$

d'où $|f(x) - f(x_n)| \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$

or $|f(x) - f(x_n)| \leq C \times 1$

car $\inf(1, |x - x_n|) \leq 1$

Ainsi par le théorème de converge dominée,

$$E[|f(X)-f(X_n)|] \xrightarrow[n\to+\infty]{} E[0] = 0$$

or $$\left| E[f(X)] - E[f(X_n)] \right| \leq E[|f(X) - f(X_n)|] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

donc $$E[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} E[f(X)]$$

d'où $$E[f(X)] - E[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2)