Feuille 5

exercice 3 :

1) $$f(s,t) = \frac{st(t^2 - s^2)}{t^2 + s^2}$$

- $(s,t) \longmapsto st$ est bien définie sur $\mathbb{R}^2$

- $(s,t) \longmapsto (t^2 - s^2)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^2$

- $(s,t) \longmapsto (t^2 + s^2)$ est bien définie et non nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

donc f est bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions bien définie dont le dénominateur ne s'annulle.

- $s = r\cos(\theta)$, $t = r\sin(\theta)$

$$f(s,t) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

$$= \frac{r\cos(\theta) \times r\sin(\theta) \times (r^2\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta)}{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cancel{r^2}\cos\theta\sin\theta \times r^2 \overbrace{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)}^{-\cos(2\theta)}}{\cancel{r^2}\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{=1}}$$

$$= -r^2 \underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\frac{\sin(2\theta)}{2}} \cos(2\theta) \quad *$$

$$= \frac{-r^2 \overbrace{\sin(2\theta)\cos(2\theta)}^{\frac{\sin(4\theta)}{2}}}{2}$$

$$= \frac{-r^2\sin(4\theta)}{2}$$

$$|f(s,t)| = \left| -\frac{r^2 \sin(4\theta)}{4} \right|$$

$$\leq \frac{r^2}{4} \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

donc f est prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0,0) = 0$.

<u>remarque</u> :

$$|f(s,t)| = \left| \frac{st(t^2 - s^2)}{t^2 + s^2} \right|$$

$$\leq \frac{|st|\ |t^2 - s^2|}{t^2 + s^2}$$

or $|t^2 - s^2| \leq t^2 + s^2$

d'où

$$|f(s,t)| \leq \frac{|st| \times \cancel{t^2+s^2}}{\cancel{t^2+s^2}}$$

$$\leq |st|$$

or $|st| \leq \dfrac{s^2+t^2}{2}$

donc :

$$|f(s,t)| \leq \frac{s^2+t^2}{2}$$

$$\xrightarrow[(s,t)\to(0,0)]{} 0$$

donc f est prolongeable par continuité et $f(0,0) = 0$.

2) • f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

• $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = ?$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

or $f(h,0) = 0$ et $f(0,0) = 0$

donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

alors $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$

- De même, $\frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial s}(s,t) = \frac{t(t^4 - 4s^2t^2 - s^4)}{(s^2+t^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(s,t) = \frac{s(t^4 - 4s^2t^2 - s^4)}{(s^2+t^2)^2}$$

- $$\left|\frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\right| = \frac{|t|\,|t^4 - 4s^2t^2 - s^4|}{(s^2+t^2)^2}$$

$$\leq \frac{|t|\,(t^4 + 4s^2t^2 + s^4)}{(s^2+t^2)^2}$$

or $t^4 + 4s^2t^2 + s^4 \leq 2(s^2+t^2)^2$

d'où $\left| \frac{\partial f}{\partial s}(s,t) \right| \leq \frac{|t| \times 2\cancel{(s^2+t^2)}}{\cancel{(s^2+t^2)}^2}$

$$\leq 2|t|$$

$$\leq 2t^2$$

$$\xrightarrow[(s,t)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial s}(0,0)$$

donc $\frac{\partial f}{\partial s}$ est continue en $(0,0)$.

De même, $\frac{\partial f}{\partial t}$ est continue en $(0,0)$.

Donc f est $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$, et donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial s}(0,0)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0+h) - \frac{\partial f}{\partial s}(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

donc $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial s}(0,0) = 1}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0+h, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h - 0}{h} = -1$$

donc $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1}$

si f est C^2, alors $\forall x, y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

↳ théorème Schwarz

comme $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$

alors f n'est pas $\mathcal{C}^2$ en $(0,0)$, et en particulier sur $\mathbb{R}^2$.

---

exercice 0 :

- $f(x,y) = x^2 - y^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 0, y = 0$

donc f admet un unique point critique $(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2$$

car $f \in C^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$$

$$H_{\binom{x}{y}} f = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y^2} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \quad x \qquad\qquad & \qquad y \end{array} \end{array}$$

$$H_{\binom{0}{0}} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det H_{\binom{\cdot}{\cdot}} f$

- $\det < 0$ → point scelle ou col
- $\det > 0$
  - $\operatorname{tr} H > 0$ → min local
  - $\operatorname{tr} H < 0$ → max local

$$\det H_{\binom{0}{0}} f = -4 < 0$$

donc $(0,0)$ est un point
selle, càd ni max ni min.