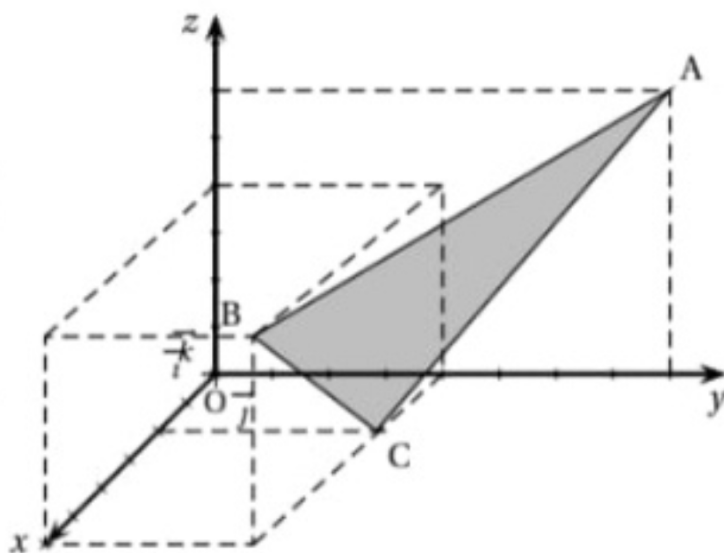


Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$A(0; 8; 6)$, $B(6; 4; 4)$ et $C(2; 4; 0)$.



1.
 - a. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; 2; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 - c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soient D et E les points de coordonnées respectives $(0; 0; 6)$ et $(6; 6; 0)$.
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).
 - b. Montrer que le milieu I du segment [BC] appartient à la droite (DE).
3. On considère le triangle ABC.
 - a. Déterminer la nature du triangle ABC.
 - b. Calculer l'aire du triangle ABC en unité d'aire.
 - c. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

- d. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie à 0,1 degré.

4. On considère le point H de coordonnées $\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

En déduire la distance du point O au plan (ABC).

$$1) \text{ a) } \vec{AB}(6; -4; -2)$$

$$\vec{AC}(2; -4; -6)$$

$$\frac{6}{2} = 3 \quad \frac{-4}{-4} = 1$$

donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B, C ne sont pas alignés.

$$\text{b) } \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{n} = 0$$

donc $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, et donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) .

c) Comme $\vec{n}(1, 2, -1)$ est normal
au plan (ABC)

$$x + 2y - z + \underline{d} = 0$$

?

$$\text{or } A(0; 8; 6) \in (ABC)$$

$$0 + 2 \times 8 - 6 + d = 0$$

$$16 - 6 + d = 0$$

$$10 + d = 0$$

$$d = -10$$

donc une équation cartésienne
du plan (ABC) est :

$$x + 2y - z - 10 = 0$$

$$2) a) \vec{DE}(6; 6; -6).$$

$$\vec{D}(0; 0; 6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 + 6t \\ y = 0 + 6t \\ z = 6 - 6t \end{array} \right. , \underline{\underline{t \in \mathbb{R}}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 6t \\ y = 6t \\ z = 6 - 6t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow I \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_C + y_B}{2}, \frac{z_B + z_C}{2} \right)$$

$$I(4; 4; 2)$$

$$4 = 6t \Rightarrow t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \checkmark$$

$$4 = 6t \Rightarrow t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \checkmark$$

$$2 = 6 - 6t \Rightarrow -4 = -6t \\ \Rightarrow t = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \checkmark$$

donc $I \in (DE)$.

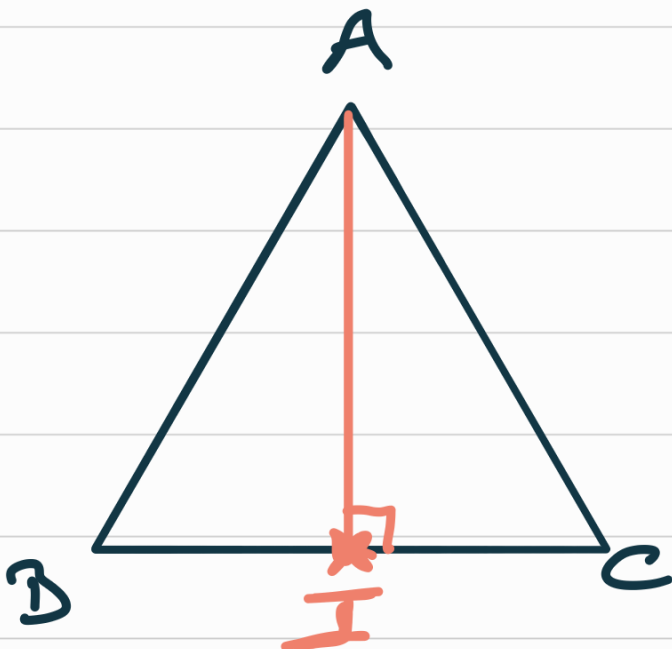
3) a) $AB = 2\sqrt{4}$

$$AC = 2\sqrt{4}$$

$$BC = 4\sqrt{2}$$

donc le triangle ABC est isocèle en A.

b) aire = $\frac{b \times h}{2}$



$$= \frac{BC \times AI}{2}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} \times 4\sqrt{3}}{2}$$

$$= 8\sqrt{6} \text{ u.a}$$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 40$

d) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$$40 = 2\sqrt{14} \times 2\sqrt{14} \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$40 = 56 \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\frac{40}{56} = \cos(\widehat{BAC})$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{40}{56}\right) \approx 44,4^\circ$$

4) . $H \in (ABC)$?

$$x + 2y - z - 10 = 0$$

$$\frac{5}{3} + 2 \times \frac{10}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right) - 10$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{20}{3} + \frac{5}{3} - 10$$

$$= \frac{30}{3} - 10$$

$$= 10 - 10$$

$$= 0$$

done $H \in (ABC)$

• $(HO) \perp (ABC)$?

$$\vec{HO} \left(-\frac{5}{3} ; -\frac{10}{3} ; \frac{5}{3} \right)$$

$\downarrow$
 $(0;0;0)$

$$\vec{n} (1; 2; -1).$$

$$\bullet \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||} = -\frac{5}{3}$$

$$\bullet \frac{-10}{2} = -\frac{5}{1}$$

$$\bullet \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||} = -\frac{5}{3}$$

donc $\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{HO}$
et $(HO) \perp (ABC)$.

donc H est le projeté
ortho. de O sur (ABC)

$$HO = \sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{5\sqrt{6}}{3}.$$