

exercice 4 :

$$f(x) = (2-x)e^{2x-1}, x \in [0; +\infty[$$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2-x = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x-1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x-1} = +\infty$

d'où par produit on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2) a) $f'(x) = -e^{2x-1} + \underbrace{(2-x) \cdot 2}_{\text{red underline}} e^{2x-1}$

$$= -e^{2x-1} + (4-2x)e^{2x-1}$$

$$= e^{2x-1}(-1 + 4 - 2x)$$

$$= e^{2x-1}(-2x + 3)$$

3) $f'(x) = \underbrace{(-2x+3)}_{\text{green bracket}} \underbrace{e^{2x-1}}_{\text{red bracket}}$

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f'	+	$\bigcirc$	-
f	$2e^{-1} \approx 0,74$	$\frac{e^2}{2} \approx 3,69$	$-\infty$

Diagram showing the function f increasing from $2e^{-1} \approx 0,74$ to $\frac{e^2}{2} \approx 3,69$ at $x = \frac{3}{2}$, and then decreasing towards $-\infty$. A green vertical line marks the point $x = \frac{3}{2}$ on the f axis.

3) f est continue sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$

f est strictement décroissante sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 3,69 > 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty < 0$$

donc par le corollaire des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$.

$$\text{Or } f(x) > 0 \text{ sur } [0; \frac{3}{2}]$$

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

et $a = 2, 00$

4)

x	0	2 ^{"2"}	$+\infty$
signe f .	+	$\emptyset$	-

5)

$$f''(x) = -2e^{2x-1} + (-2x+3) \times 2e^{2x-1}$$
$$= (-4x+4)e^{2x-1}$$

SC

x	0	1	$+\infty$
signe f''	+	$\emptyset$	-

donc f est convexe sur $[0; 1]$
et elle est concave sur $[1; +\infty[$.

De plus, les coordonnées du
point d'inflexion sont $(1; \frac{1}{e})$

$$6) y = f'(0,5)(x - 0,5) + f(0,5)$$

$$f'(0,5) = 2$$

$$f(0,5) = 1,5$$

donc une équation de la tangente
 T est:

$$y = 2(x - 0,5) + 1,5$$

$$y = 2x - 1 + 1,5$$

$$y = 2x + 0,5$$

7). comme f est convexe sur $[0; 1]$, alors la tangente T est au dessus de la courbe donc $(2-x)e^{2x-1} - 2x - 0,5 > 0$, sur $[0; 1]$

- comme f est concave sur $[1; +\infty[$, alors la tangente T est au dessus de la courbe donc $(2-x)e^{2x-1} - 2x - 0,5 < 0$, sur $[1; +\infty[$.