

Statistiques

1 - Estimateur.

- une statistique $(x_1, \dots, x_n)$ tels que X_i i.i.d.
- un estimateur de θ est une statistique $\Rightarrow \hat{\theta}_n$

exemple : • un estimateur de la moyenne est :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i . \quad \rightarrow \text{sans biais}$$

• un estimateur de la variance est

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

↳ sans biais

• le biais :

$$b(\hat{\theta}_n) = E[\hat{\theta}_n] - \theta$$

⇒ on dit que l'estimateur est sans biais si $b(\hat{\theta}_n) = 0$, i.e $E[\hat{\theta}_n] = \theta$.

• erreur quadratique moyenne :

$$EQM = V(\hat{\theta}_n) + b(\hat{\theta}_n)^2$$

$$= E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]$$

Remarque:

• si $E[\hat{\theta}_n] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta$,

alors $\hat{\theta}_n$ asymptotiquement sans biais.

• si $\hat{\theta}$ estimateur est sans biais, alors :

$$E Q \pi = V(\hat{\theta}_n)$$

2. Vecteurs Gaussiens

• une variable aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ est un vecteur Gaussien si $\forall a = (a_1, \dots, a_n)^T$ la variable aléatoire réelle $\langle a, X \rangle = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ est gaussienne.

$\Rightarrow$ $X_i \subset \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$ indépendantes, alors $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ est gaussien.

$\Rightarrow$ si $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ est gaussien alors on a :

$$m = E[X] = (E[X_1], \dots, E[X_n])^T$$

et sa matrice de covariance

$$\Sigma = \left(\text{cov}(X_i, X_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \dots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \dots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

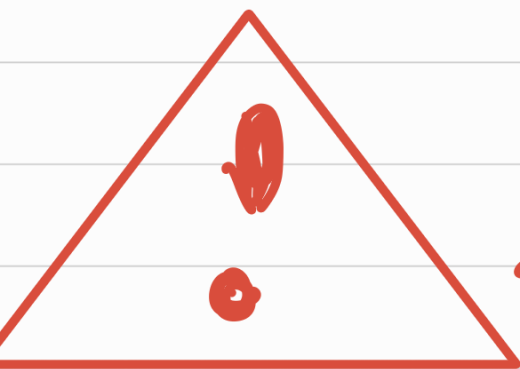
$\Rightarrow \Sigma$ est une matrice réelle symétrique

• Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes deux à deux, alors:

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad i \neq j.$$

$$\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

↪ Si X et Y sont
indépendants alors
 $E[XY] = E[X]E[Y]$.



Si $X_1, \dots, X_n$ gaussiennes
alors :

$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes

$\Leftrightarrow X = (X_1, \dots, X_n)^T$ gaussien

de matrice de covariance
nulle.

$\Rightarrow$ Soient $X \hookrightarrow \mathcal{N}_n(m, \Sigma)$
 $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

et $Y = AX + b$, $A \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$

$$b \in \mathbb{R}^p$$

Alors Y est gaussien et
on a :

$$Y \hookrightarrow \mathcal{N}_p(Am + b, A \Sigma A^T)$$

$$\underbrace{X^T X}_{1 \times n \quad n \times 1} = \text{Tr}(X)$$

théorème de Cochran :

Soit $X \subset \mathcal{N}_n(0, \underbrace{\sigma^2 I_n}_{\begin{pmatrix} \sigma^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma^2 \end{pmatrix}})$.

on suppose $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus^\perp \dots \oplus^\perp E_p$

Alors les projections $\pi_{E_1} X, \dots, \pi_{E_p} X$ sont des vecteurs gaussiens indépendants de loi respectives :

$$\pi_{E_1} X \subset \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \pi_{E_1})$$

$\vdots$

$$\pi_{E_p} X \subset \mathcal{N}_n(0, \sigma^2 \pi_{E_p})$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, p\}, \frac{1}{\sigma^2} \|\pi_{E_i} X\|^2 \subset \chi^2(\text{dim } E_i)$$

d.d for E_i