

EXERCICE 4

5 points

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (2 - x)e^{2x-1}$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) = (-2x + 3)e^{2x-1}$.
(b) Déterminer les variations de f sur $[0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α .
4. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$.
5. Étudier la convexité de f sur $[0; +\infty[$ et préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe de f .
6. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0,5.
7. Pour tout x de $[0; +\infty[$, que peut-on dire du signe de $(2 - x)e^{2x-1} - 2x - 0,5$?

$$\underbrace{f(x)}_{\text{}} - \underbrace{(2x + 0,5)}_{T}$$

1). $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

donc par compositions de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x-1} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - x = -\infty$.

donc par produits de limite
on a

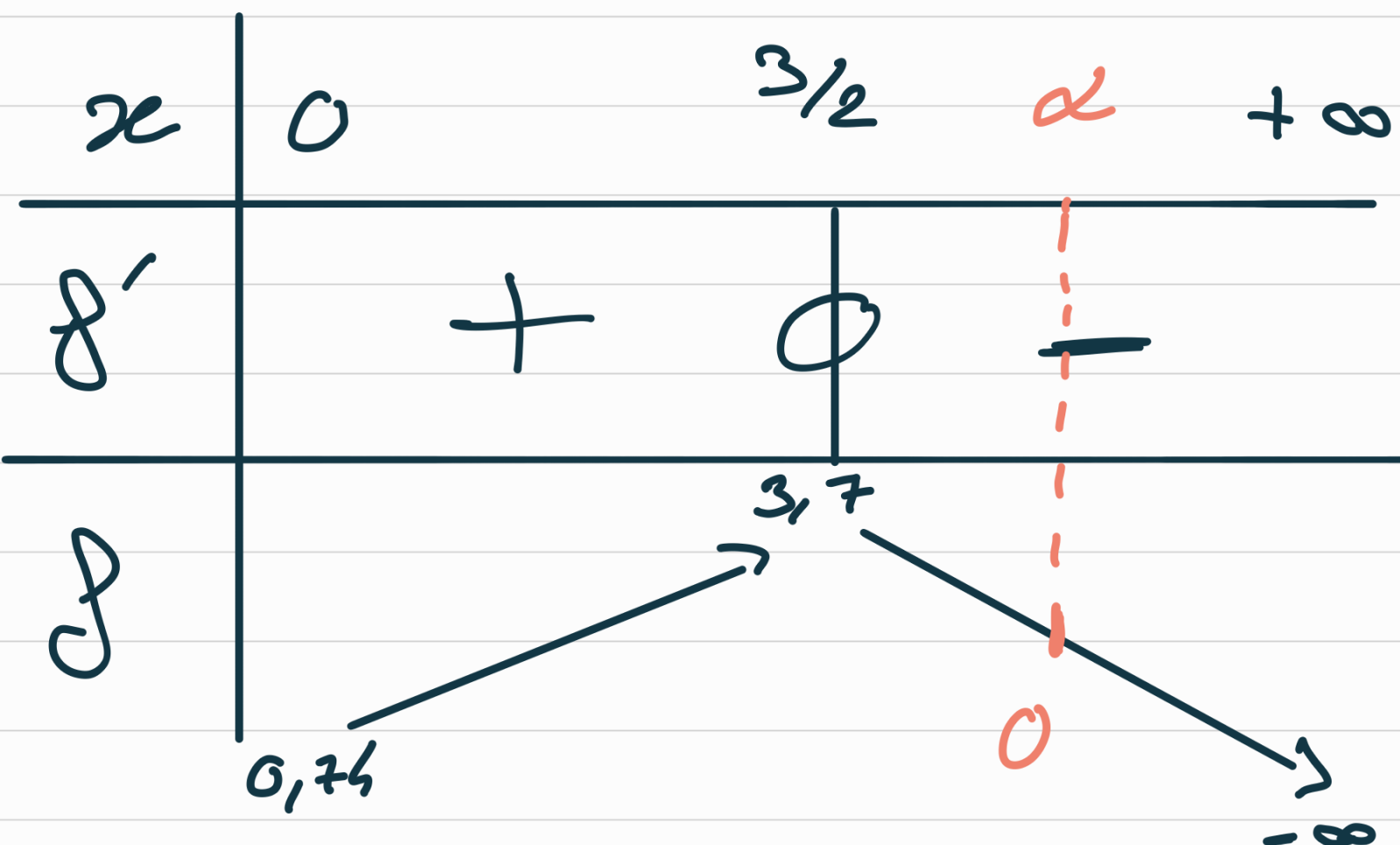
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

2) a) $f'(x) = (-2x+3) \underbrace{e^{2x-1}}_{>0}$

b) $-2x+3 > 0$

$$\Leftrightarrow -2x > -3$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$



3) . f est continue sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$

• f est strictement décroissante sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$

• $f(\frac{3}{2}) \simeq 3,7 > 0$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty < 0$

donc d'après le corollaire
 du théorème des valeurs
 intermédiaires l'équation $f(x) = 0$
 admet une unique solution α
 sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$.

$$\alpha \quad f(x) > 0 \quad \text{sur} \quad [0; \frac{3}{2}]$$

Donc l'équation $f(x) = 0$
 admet une unique solution α sur
 $[0; +\infty[$.

4)

x	0	α	$+\infty$
signe f	+	0	-

$$5) f''(x) = (4 - 4x) e^{2x-1}$$

$$4 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq 4x$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq x$$

x	0	1	$+\infty$
signe f''	+	0	-

donc f est convexe sur $[0; 1]$ et f est concave sur $[1; +\infty[$.

Les coordonnées du point d'inflexion est $(1; e)$

6) $y = 2x + 0,5$

7). Comme f est convexe sur $[0; 1]$, alors $(2-x)e^{2x-1} - 2x - 0,5 > 0$ sur $[0, 1]$.

. Comme f est concave sur $[1; +\infty[$, alors $(2-x)e^{2x-1} - 2x - 0,5 \leq 0$ sur $[1; +\infty[$.