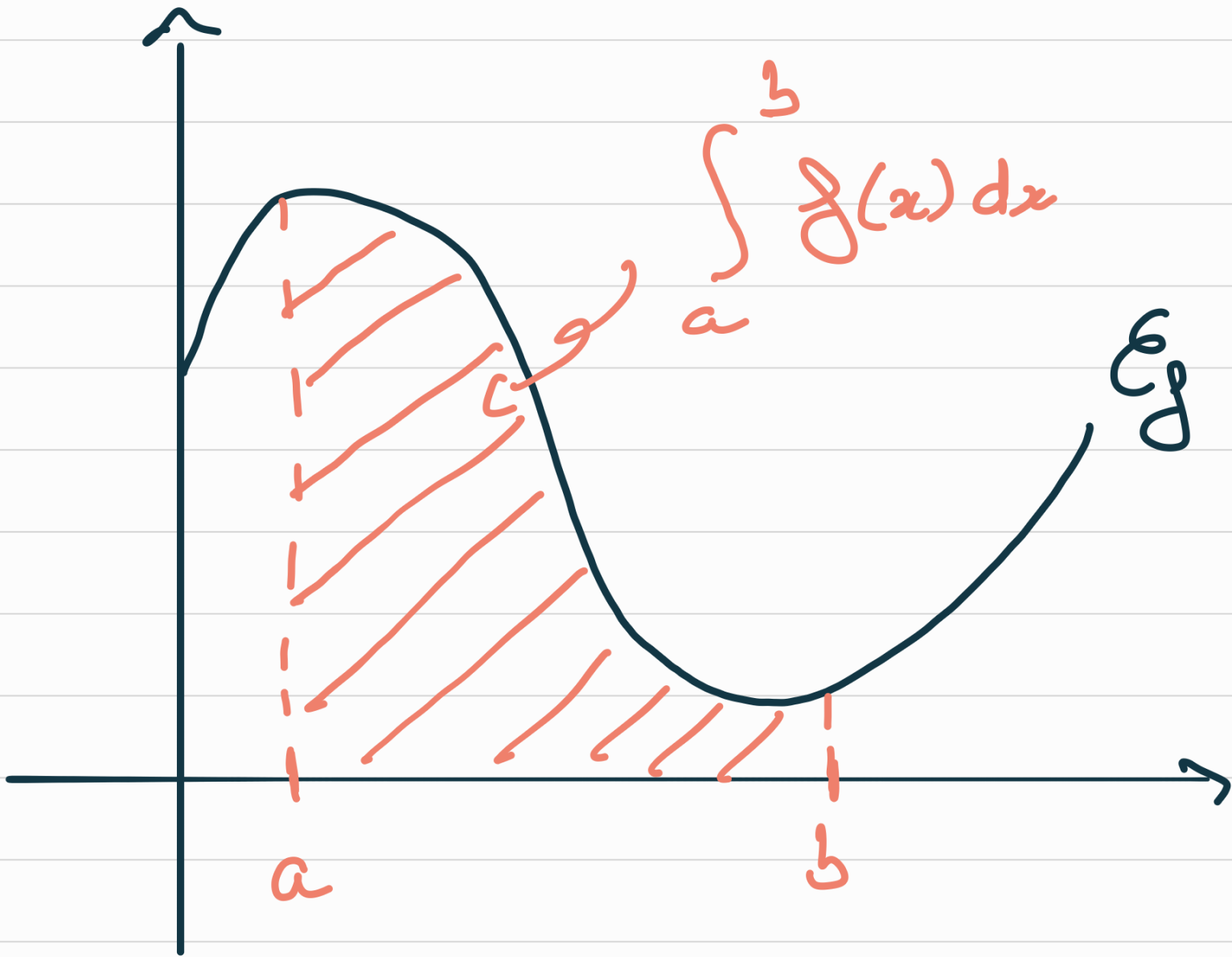


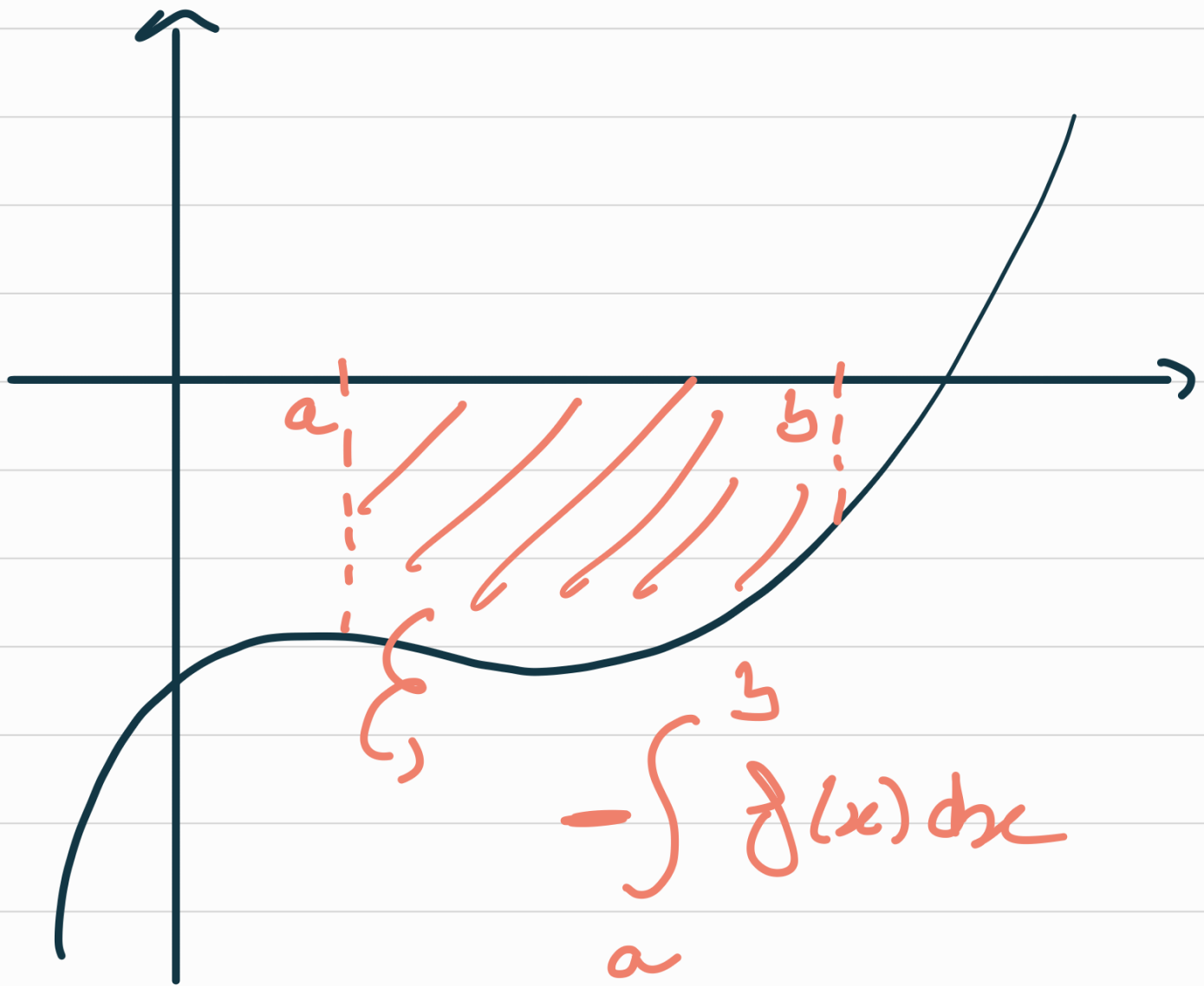
Intégrale



$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b$$

primitive

$$= F(b) - F(a)$$



• $\int_a^a f(x) dx = 0$

• $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b [kf(x) + g(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\bullet f(x) > g(x) \text{ sur } [a; b] \\ \left(\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx \right)$$

exercice :

1) $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$.

$$\int_0^2 f(x) dx = \left[\frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x \right]_0^2$$

$$= \left[2x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^2$$

$$= (2 \times 2^3 - 2 \times 2^2 + 3 \times 2) - (2 \times 0^3 - 2 \times 0 + 3 \times 0)$$

$$= 14 - 0$$

$$= 14.$$

2) En déduire la valeur moyenne de f sur $[0; 2]$

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$m = \frac{1}{2-0} \times \int_0^2 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \times 14$$

$$= 7$$

exercice

$$\bullet h(x) = (1 - 2x^2) e^{1-x^2}$$

$$\text{et } H(x) = x e^{1-x^2}$$

1) Démontrer que H est une primitive de h

$$\begin{aligned} H'(x) &= e^{1-x^2} + 2x - 2x e^{1-x^2} \\ &= e^{1-x^2} (1 - 2x^2) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

2) Calculer $\int_0^1 h(x) dx$

$$\int_0^1 h(x) dx = \left[x e^{1-x^2} \right]_0^1$$

$$= 1 \times e^{1-1^2} - 0 \times e^{1-0^2}$$

$$= 1 \times e^0 - 0$$

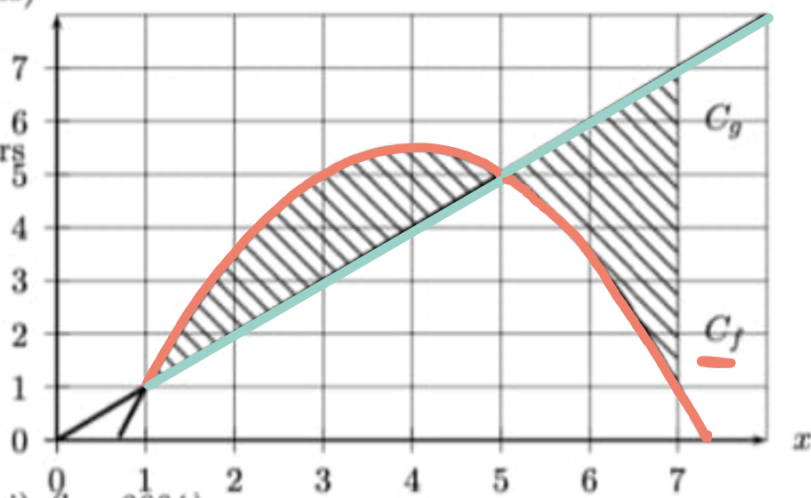
$$= 1$$

exercice 19 : (aire de la surface entre deux courbes)

1. estimer graphiquement un encadrement de l'aire de la surface hachurée I par deux entiers

2. sachant que :
$$\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{2} \\ g(x) = x \end{cases}$$

déterminer la valeur exacte de I
(considérer deux surfaces)



$$I = \int_1^7 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_1^5 f(x) - g(x) dx$$

$$+ \int_5^7 g(x) - f(x) dx$$

$$= \int_1^5 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{2} - x \right) dx$$

$$+ \int_5^7 x - \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{2} \right) dx$$

$$= \int_1^5 \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} dx$$

$$+ \int_5^7 -\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{5x}{2} \right]_1^5$$

$$+ \left[-\frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2} \right]_5^7$$

$$= \dots$$

example 16

1) on $\text{per } h(x) = f(x) - g(x)$

$$= \frac{1}{x} - (2 - x)$$
$$= \frac{1}{x} - 2 + x$$
$$= \frac{1 - 2x + x^2}{x} \quad x > 0$$

sur $[1; 3]$, $x > 0$

$$\Delta = 0$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
sign $x^2 - 2x + 1$	$+$	$\emptyset$	$+$	

donc $h(x) > 0$ sur $[1; 3]$

et donc $f(x) > g(x)$ sur $[1; 3]$

$$2) \int_1^3 f(x) - g(x) dx$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{x} - 2 + x dx$$

$$= \left[\ln(x) - 2x + \frac{x^2}{2} \right]_1^3$$

$$= \left(\ln(3) - 6 + \frac{9}{2} \right) - \left(\cancel{\ln(1)} - 2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \ln(3) - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \ln(3) \text{ u. a}$$

Integration par parties

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

exemple :

$$I = \int_0^1 \underbrace{x}_{v(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u'(x)} dx$$

$$= \left[e^x x \right]_0^1 - \int_0^1 1 x e^x dx$$

$$= (e^1 \times 1 - e^0 \times 0) - \int_0^1 e^x dx$$

$$= e - \left[e^x \right]_0^1$$

$$= e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1.$$

$$x e^x$$

$\swarrow$ $\searrow$
 $v(x)$ $u'(x)$

$$x \ln(x)$$

$\swarrow$ $\searrow$
 $u'(x)$ $v(x)$

exercice :

$$C = \int_{-1}^4 \underline{(5x^2 - 2x)(3x + 2)} dx$$

$$= \int_{-1}^4 15x^3 + 4x^2 - 4x dx$$

$$= \left[\frac{15x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - 2x^2 \right]_{-1}^4$$

$$= \left(\frac{15 \times 4^4}{4} + \frac{4 \times 4^3}{3} - 2 \times 4^2 \right)$$

$$- \left(\frac{15 \times (-1)^4}{4} + \frac{4 \times (-1)^3}{3} - 2 \times (-1)^2 \right)$$

$$= \frac{3040}{3} - \frac{5}{12} = \frac{12159}{12}$$