

exercice 7 :

$$y' = ay + b$$

$$y(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} 1) & y' = \overset{a=-1}{-}y + \overset{b=5}{5} \\ & y(0) = 1 \end{cases}$$

les solutions sont :

$$y(x) = k e^{-x} - \frac{5}{-1}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = k e^{-x} + 5, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- $y(0) = k e^0 + 5 = k + 5$

$$y(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k + 5 = 1$$

$$\Leftrightarrow k = 1 - 5$$

$$\Leftrightarrow k = -4$$

donc la solution est :

$$y(x) = -4 e^{-x} + 5$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 2y' + 3 &= 6y \\ 2y' &= 6y - 3 \\ y' &= \frac{6}{2}y - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = 3y - \frac{3}{2}} \quad \checkmark$$

Les solutions sont

$$y(x) = k e^{3x} - \frac{-\frac{3}{2}}{3}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y(x) = k e^{3x} + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned}
 y(h(x)) &= k e^{3h(x)} + \frac{1}{2} \\
 &= k e^{h(x^3)} + \frac{1}{2} \\
 &= k e^{h(8)} + \frac{1}{2} \\
 &= k \times 8 + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$y(h(x)) = 5 \Leftrightarrow 8k + \frac{1}{2} = 5$$

$$\Leftrightarrow 8k = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\frac{9}{2}}{8}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{9}{16}$$

donc

$$y(x) = \frac{9}{16} e^{3x} + \frac{1}{2}$$

exercice 8

$$y' = \frac{3}{2}y + 2.$$

$$\Rightarrow y(x) = k e^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}, k \in \mathbb{R}$$

$x \mapsto -\frac{4}{3}$ solution particulière.

Affirmation 1: vraie une fonction constante solution est $x \mapsto -\frac{4}{3}$.

$$f(0) = k e^0 - \frac{4}{3} = k - \frac{4}{3}$$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow k - \frac{4}{3} = 0 \\ \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$$

$$f(x) = \frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}$$

↳ $f'(1)$ est le coeff. directeur

$$f'(x) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}x} = 2e^{\frac{3}{2}x}$$

$$f'(1) = 2e^{\frac{3}{2}}$$

donc l'affirmation 2 est vraie

exercice 9

$$1) y(x) = k e^{ax} - \frac{(-10)}{\cancel{a}}, k \in \mathbb{R}$$

$$= k e^{ax} + 10, k \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = k e^{a \cdot 0} + 10 = k + 10$$

$$y(0) = 30 \quad \Leftrightarrow \quad k + 10 = 30$$

$$\Leftrightarrow k = 30 - 10$$

$$\Leftrightarrow k = 20$$

donc

$$y(x) = 20 e^{ax} + 10$$

$$2) \quad y(10) = 20e^{10a} + 10$$

$$y(10) = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 20e^{10a} + 10 = 20$$

$$\Leftrightarrow 20e^{10a} = 20 - 10 = 10$$

$$\Leftrightarrow e^{10a} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\ln(e^{10a}) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 10a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{\ln(2)}{10}$$

exercice 10:

1) comme f est solution de (E) alors elle est de la forme :

$$f(t) = C e^{-0,08t} - \frac{\frac{9}{50}}{-0,08}, C \in \mathbb{R}$$

$$= C e^{-0,08t} - \frac{9}{4}, C \in \mathbb{R}$$

2) a) $f(t) = C e^{-0,08t} + \frac{9}{4}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,08t = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

donc par composition de limites
on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,08t} = 0$$

donc par somme de limites,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{9}{4}$$

b) $f(0) = 0,7$

$$f(0) = C e^{-0,08 \times 0} - \frac{9}{4}$$

$$= C - \frac{9}{4}$$

$$f(0) = 0,7 \quad \Rightarrow \quad C - \frac{9}{4} = 0,7$$

$$\Rightarrow C = 0,7 + \frac{q}{4}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{4} = 2 \Leftrightarrow q = 4 \times 2 = 8$$

d'au

$$C = 0,7 + \frac{8}{4} = 2,7$$