exercice 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \to -L_1 \; : \; D_1(-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \to L_2 + 3L_1 \; : \; T_{21}(3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \to L_3 - 3L_1 \ : \ T_{31}(-3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$L_2 \to -\frac{1}{4} L_2 \ : \ D_2\left(-\frac{1}{4}\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$L_1 \to L_1 + 2L_2 \ : \ T_{12}(2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$L_3 \to L_3 - 6L_2 \ : \ T_{32}(-6)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \to L_2 + \frac{1}{2} L_3 \ : \ T_{23}(\frac{1}{2}).$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc :

$$A^{-1} = T_{23}\left(\frac{1}{2}\right) T_{32}(-6)\, T_{12}(2)\, D_2\left(-\frac{1}{4}\right) T_{31}(-3)\, T_{21}(3)\, D_1(-1).$$

exercice 2 :

1)

départ

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \to v_1 \\ \to v_2 \\ \to v_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \end{array}$$

arrivée

$$f(v_1) = v_2$$

$$f(v_2) = v_3 \qquad f(v_3) = v_1$$

2) $f : E \to E$

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \longrightarrow$ nouvelle base

$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \longrightarrow$ base canonique

$$P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = P\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\, P^{-1}$$

$$= A\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\, A^{-1}$$

$\hookrightarrow$ exo 1

$= \ldots$

$$f : E \to E$$

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \to \text{canonique}$$

$$B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \to \text{autre base}$$

$$P = P_{\mathcal{E} \to \mathcal{B}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = P^{-1} A P \\ A = P B P^{-1} \end{cases}$$

exercice 3 :

1) $\ker(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0_{\mathbb{R}^n}\}$

2) Soit $x \in \ker(A)$

alors $Ax = 0$

on a : $Cx = (BA)x$

$= B(Ax)$ car $x \in \ker(A)$

$= B \times 0$

$= 0$

donc $x \in \ker(C)$

Donc $\ker(A) \subset \ker(C)$.