

Propriété. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$



Propriété. Opérations sur les dérivées

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Fonction	Dérivée
ku , (k constante)	ku'
$u + v$	$u' + v'$

6.5 Applications aux fonctions polynômes de degré 2 et 3

Propriété

- Les fonctions polynômes de degré 2 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 2ax + b$.
- Les fonctions polynômes de degré 3 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Exercice 1

Calculer, pour chacune des fonctions suivantes, sa fonction dérivée.

1. $f(x) = x^2 - 4 \rightarrow f'(x) = 2x + 0 = 2x$
2. $g(x) = x^3 + x \rightarrow g'(x) = 3x^2 + 1$
3. $h(x) = 4x^2 - 6x \rightarrow h'(x) = 4 \times 2x + (-6) \times 1 = 8x - 6$
4. $k(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 5 \rightarrow k'(x) = 2 \times 3x^2 + (-5) \times 2x + 7 \times 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7$
5. $u(x) = 2x^2 - 4x + 9 \rightarrow u'(x) = 2 \times 2x - 4 \times 1 + 0 = 4x - 4$
6. $v(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3x + 9 \rightarrow v'(x) = -2 \times 3x^2 + 6 \times 2x - 3 \times 1 + 0$

$$= -6x^2 + 12x - 3$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 6x - 10.$$

1. (a) Calculer $f'(x)$. $f'(x) = 2x + 6x \pm 0 = 2x + 6$

- (b) Étudier le signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
signe	$-$	0	$+$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$$

2. (a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f			

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^2 + 6(-3) - 10 \\ &= 9 - 18 - 10 \\ &= -19 \end{aligned}$$

- (b) En déduire que f admet un extremum sur $\mathbb{R}$. Préciser en quelle valeur de x il est atteint.

f admet un minimum atteint par $x = -3$ et sa valeur est -19 .

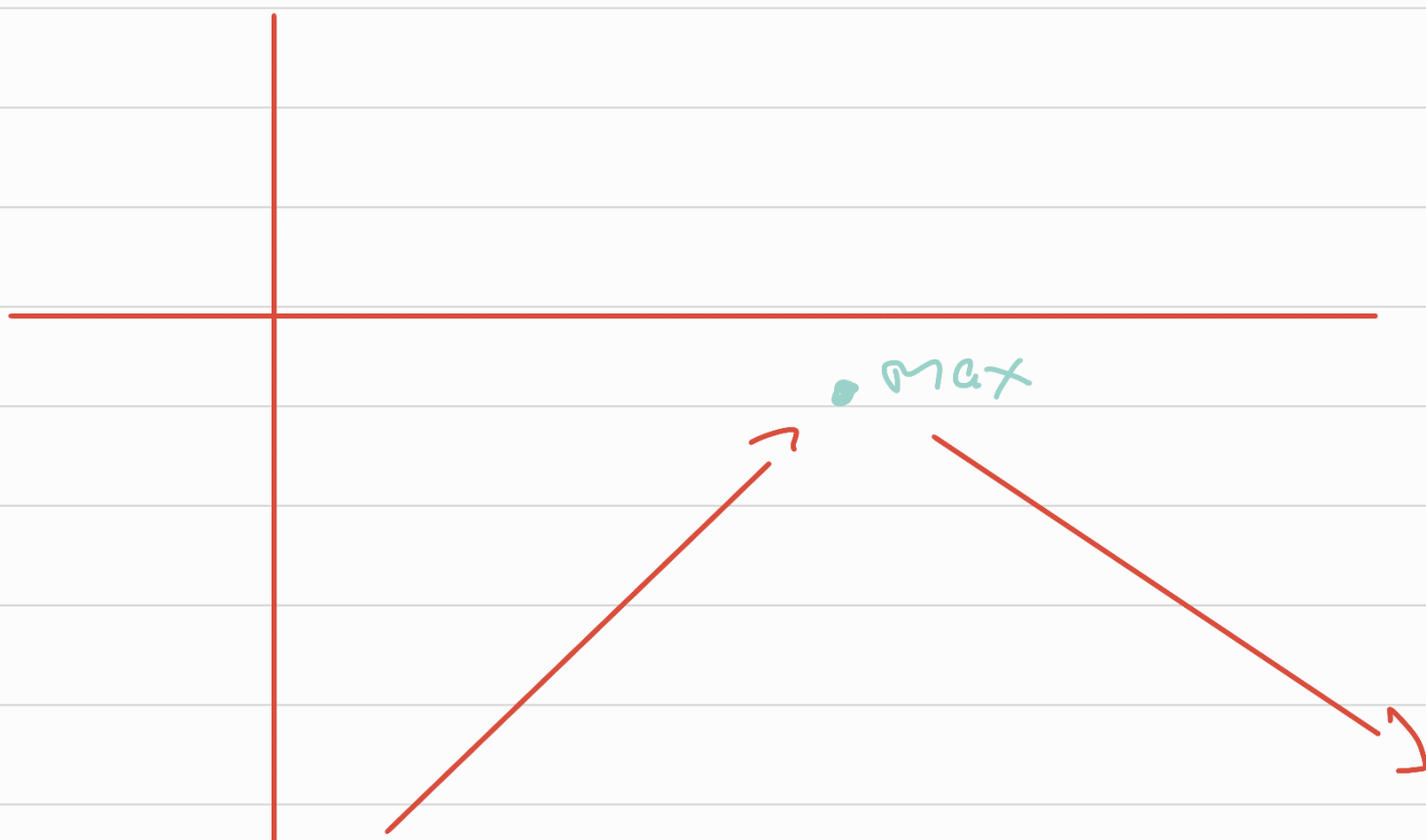
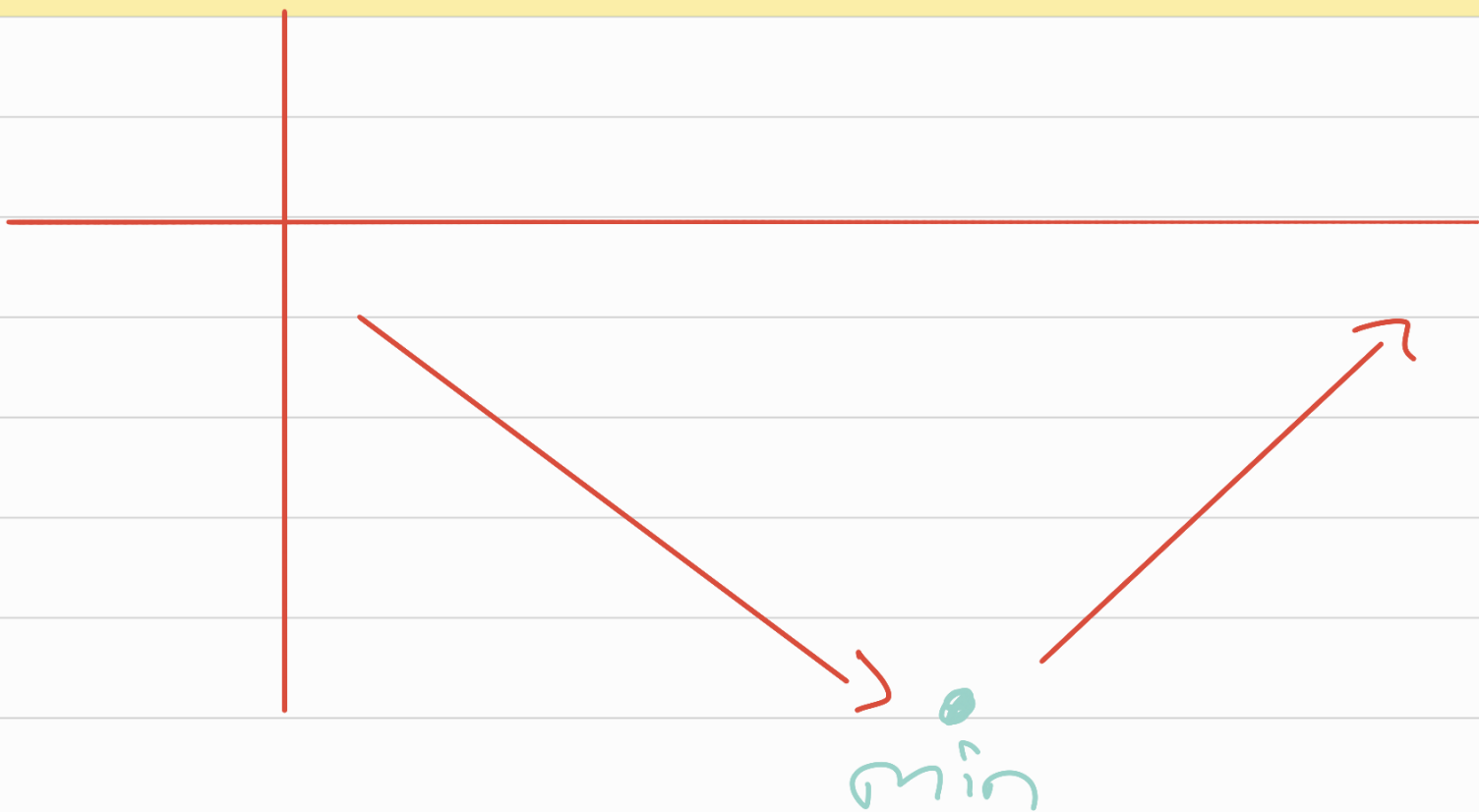
$$ax + b$$

$$a > 0$$

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe	$+$	0	$-$



Exercice 3

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 500.$$

1. On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[0; 20]$ et on note f' sa dérivée. Calculer $f'(x)$

$$f'(x) = -1 \times 3x^2 + 30 \times 2x - 108 \times 1 + 0 = -3x^2 + 60x - 108.$$

2. Montrer que $f'(x) = -3(x-2)(x-18)$

$$\begin{aligned} &= -3x \times x + -3x \times (-18) + 6 \times x + 6 \times (-18) \\ &= -3x^2 + 54x + 6x - 108 = -3x^2 + 60x - 108 = f'(x) \end{aligned}$$

3. Donner les abscisses des points de la courbe représentative de f en lesquels la tangente est horizontale.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -3(x-2)(x-18) = 0 \quad (\Rightarrow \quad \overbrace{(x-2)(x-18)}^{f'(x)=0} = 0 \dots \left. \begin{array}{l} x=2 \\ \text{ou } x=18 \end{array} \right\} \\ &\quad \quad \quad \neq 0 \quad \quad \quad \Leftrightarrow \underbrace{x-2=0}_{\neq 0} \text{ ou } \underbrace{x-18=0}_{\neq 0} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x=2 \\ \text{ou } x=18 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

4. Étudier le signe de cette fonction dérivée puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 20]$.

Y a-t-il un maximum sur l'intervalle $[0; 20]$? Si oui donner ses coordonnées.

x	0	2	18	20
-3				
$x-2$	-	0	+	
$x-18$		-	0	+
f'	-	0	+	0

x	0	2	18	20	
f'	-	0	+	0	-
f				144	
			-604		

$$f(2) = -2^3 + 30 \times 2^2 - 108 \times 2 - 500$$

$$f(18) = -18^3 + 30 \times 18^2 - 108 \times 18 - 500$$

$$= 1444$$

f admet un maximum atteint par $x = 18$ et sa valeur est 1444.

