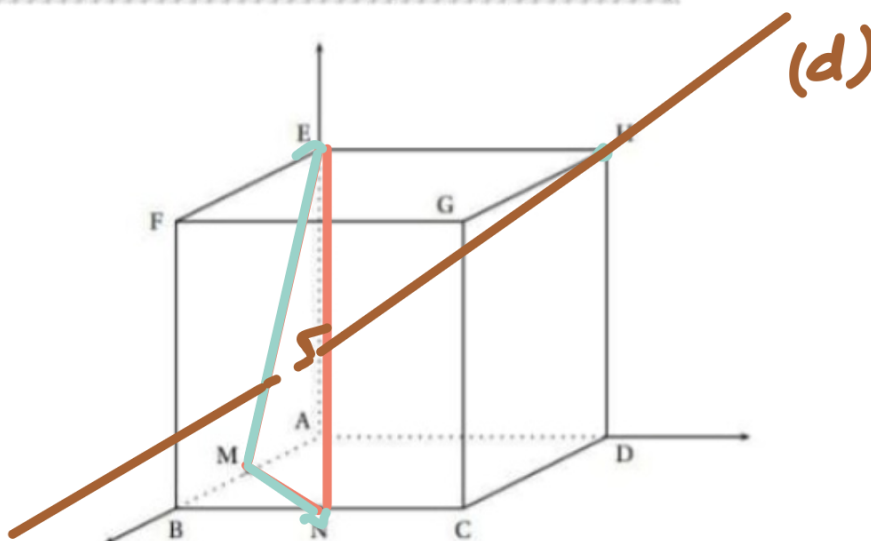


Exercice n°1: Géométrie dans l'espace – 7 points



Soit $ABCDEFGH$ un cube. M est le milieu de $[AB]$ et N est le milieu de $[BC]$. Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- 1] Donner les coordonnées des points M et E .
- 2] Justifier que les coordonnées du point N sont $(1; \frac{1}{2}; 0)$.
- 3] Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan (MNE) .
- 4] Montrer alors qu'une équation cartésienne du plan (MNE) est :
$$x - y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$$
- 5] Le point H appartient-il au plan (MNE) ?

Soit (d) la droite passant par H et perpendiculaire au plan (MNE) .

- 6] Montrer qu'une équation paramétrique de la droite (d) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + \frac{1}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- 7] Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) et du plan (MNE).

On considère maintenant le tétraèdre $MNEH$. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est obtenu par la formule :

$V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est la base et h est la hauteur.

- 8] Sachant que l'aire du triangle MNE est 0,38.
Déterminer le volume de du tétraèdre $MNEH$.

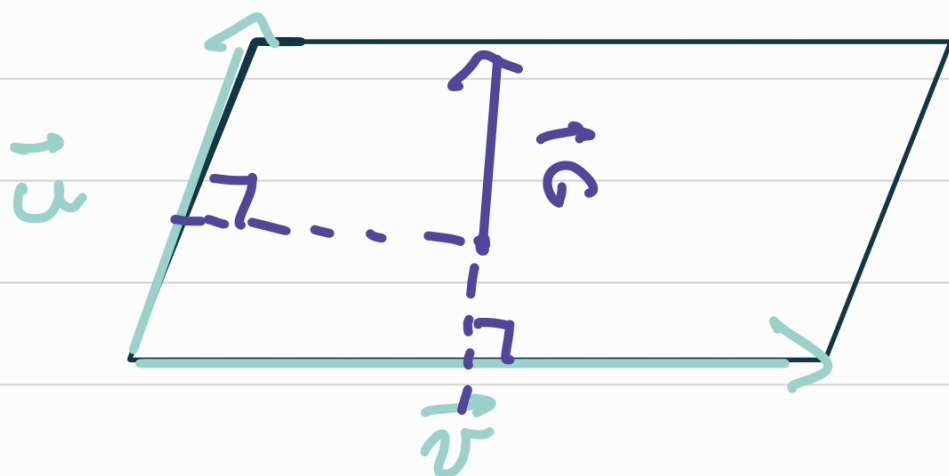
$$1) \quad \pi(0, 5; 0, 0) \\ E(0; 0; 1)$$

$$2) \quad \mathcal{B}(1; 0; 0) \\ C(1; 1; 0)$$

$$N\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$$

$$N\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$$

3)



$$\vec{MN}(0,5; 0,5; 0)$$

$$\vec{ME}(-0,5; 0; 1)$$

$$\cdot \vec{n} \cdot \vec{MN} = 1 \times 0,5 + (-1) \times 0,5 + 0 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$\cdot \vec{n} \cdot \vec{ME} = -0,5 \times 1 + 0 \times -1 + 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal

aux vecteurs $\vec{r}_N$ et $\vec{r}_E$ (non colinéaires), et donc $\vec{n}$ est normal au plan (π_{NE}).

4) comme $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (π_{NE}), alors on a :

$$x - y + \frac{1}{2}z + d = 0$$

$$\alpha \quad M(0,5; 0; 0) \in (\pi_{NE})$$

$$\text{d'où} \quad 0,5 - 0 + \frac{1}{2} \times 0 + d = 0$$

$$0,5 + d = 0$$

$$d = -0,5$$

donc une équation cartésienne du plan (π_{NE}) est :

$$x - y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$$

5) $H(0; 1; 1)$

$$. \quad 0 - 1 + \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2}$$

$$= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= -1 \neq 0$$

donc le point H n'appartient pas au plan (PNE) .

6) Comme (d) est perpendiculaire au plan (PNE) , alors $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right)$ est directeur (d) .

et $H(0; 1; 1) \in (d)$, donc
une équation paramétrique de
(d) est :

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \times t \\ y = 1 - 1 \times t \\ z = 1 + \frac{1}{2} \times t \end{cases}, \underline{\underline{t \in \mathbb{R}}}$$

cad :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + \frac{1}{2}t \end{cases}, \underline{\underline{t \in \mathbb{R}}}$$

- $(x, y, z) \in (HNE) \cap (d)$

$$7) \Leftrightarrow t - (1 - t) + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}t) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t - 1 + t + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}t = 1$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

- $x = \frac{4}{9}$

$$y = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$z = 1 + \frac{1}{2}t = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{11}{9}$$

donc le point d'intersection
a pour coordonnées $(\frac{4}{9}; \frac{5}{9}; \frac{11}{9})$.

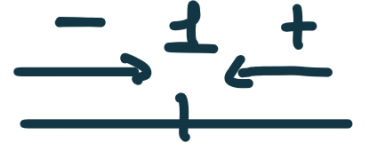
Exercice n°2 - Fonction ln, suites numériques – 7 points

Dans cet exercice, les deux parties sont indépendantes, cependant les résultats de la partie A peuvent être utilisés pour la partie B.

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x - 1)$.

1] Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. On admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



2] Soit f' la fonction dérivée de la fonction f .

Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-2}{x-1}$

3] En déduire le tableau de variations complet de la fonction sur $]1; +\infty[$.

4] En déduire que pour tout $x \in]1; +\infty[$: $f(x) \geq 2$

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

donc par composition on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1^+} -\ln(x-1) = +\infty$$

Donc par somme on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$