

Déterminer les coordonnées des points

Exercice 3. Droite d'Euler dans un cas particulier — ★☆☆

Soit les points B, C et D non-alignés de coordonnées respectives :

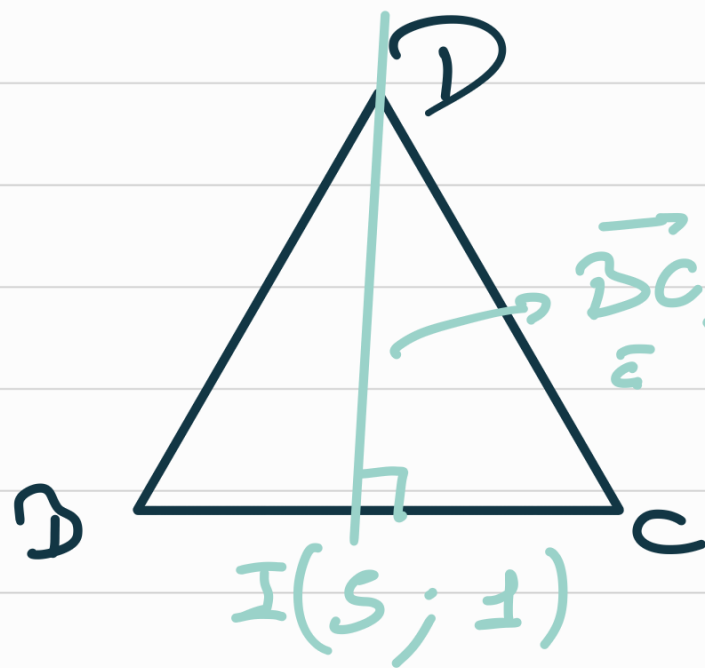
$$B(3; 11) \quad C(7; -9) \quad D(-9; 7)$$

Nous notons I, J et K les milieux respectifs des segments $[BD]$, $[CD]$ et $[BC]$.

1. Nous notons $(d_1), (d_2)$ et (d_3) les médiatrices respectives de $[BD]$, $[CD]$ et $[BC]$.
 - (a) Déterminer des équations cartésiennes pour deux de ces trois médiatrices
 - (b) Déterminer le point d'intersection Ω de ces deux médiatrices.
2. Nous notons $(D_1), (D_2)$ et (D_3) les hauteurs respectivement issues de B, C et D dans le triangle BCD .
 - (a) Déterminer des équations cartésiennes pour deux de ces trois hauteurs.
 - (b) Déterminer le point d'intersection H de ces deux hauteurs.
3. Nous notons $(\Delta_1), (\Delta_2)$ et (Δ_3) les médianes respectivement issues de B, C et D dans le triangle BCD .
 - (a) Déterminer des équations cartésiennes pour deux de ces trois médianes.
 - (b) Déterminer le point d'intersection G de ces deux médianes.
4. Vérifier que les points Ω, H et G sont bien alignés¹.

¹ triangle : ce sont respectivement le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité. Le fait que ces trois points soient alignés (sur la droite d'Euler) a été démontré.

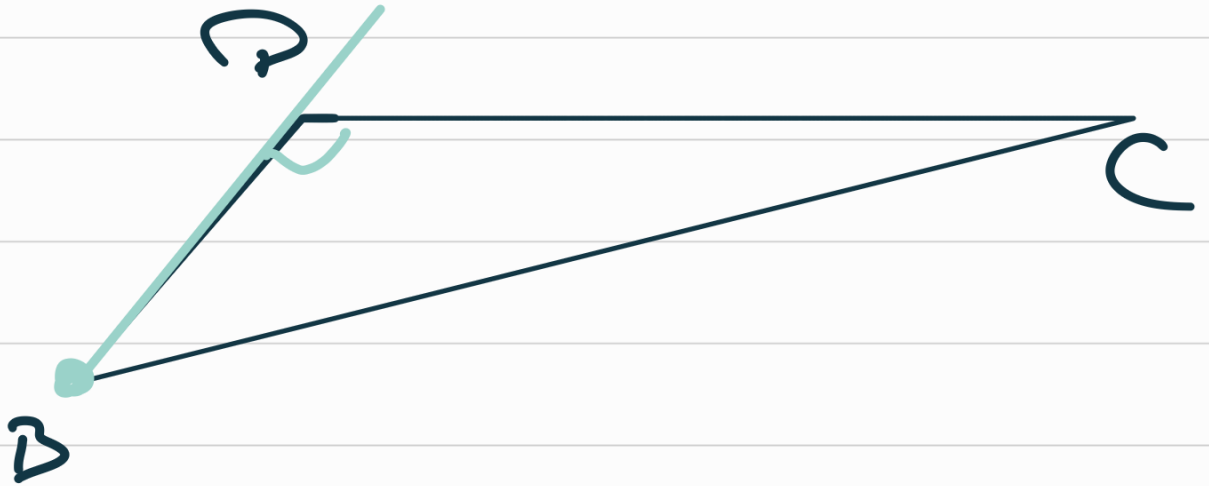
1)



$\vec{BC}$ est normal à la médiatrice de $[BC]$

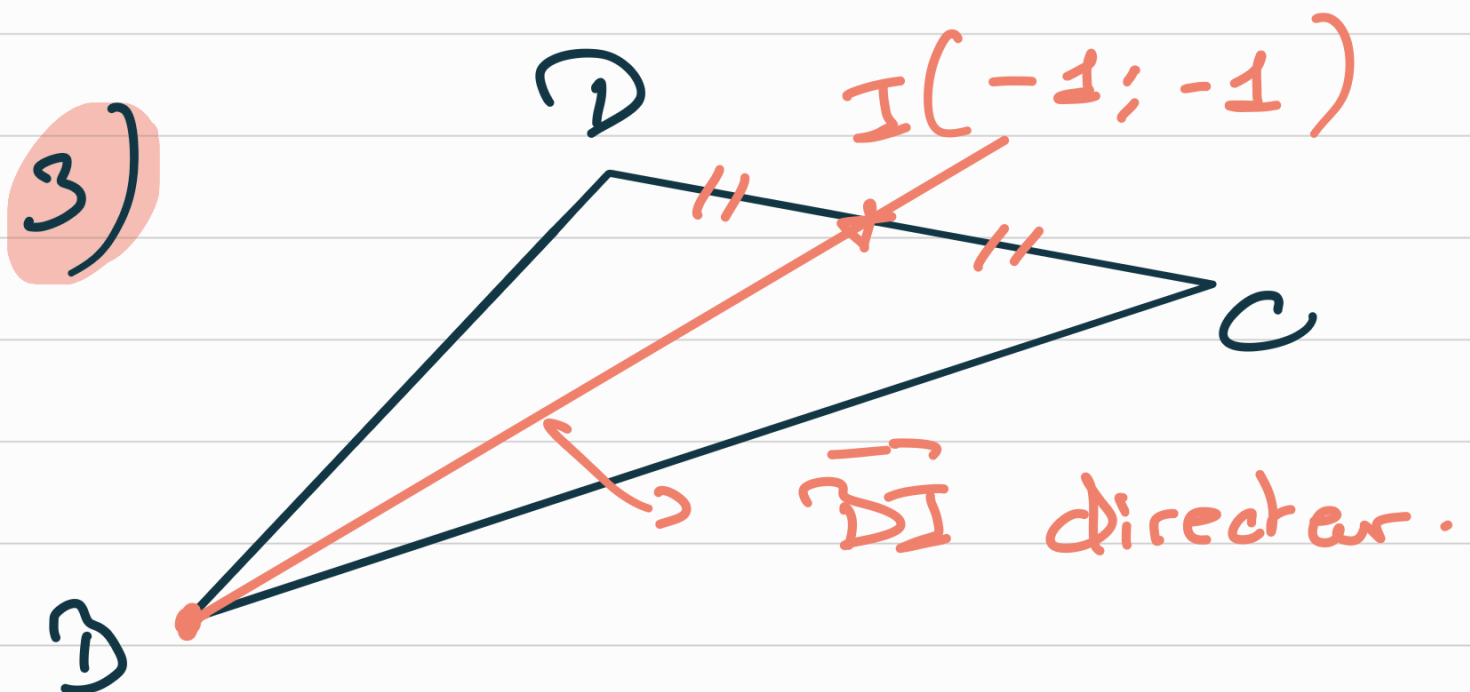
$$r(x; y) \in \dots$$

2) (D) hauteur issue de B



point : sommet B

vecteur normal : côté opposé $\vec{DC}$



Exercice 5. Équations de cercle —
 Les équations suivantes sont des équations de cercle.
 Déterminer, pour chacun d'entre eux, son centre et son rayon

1. (a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$ (b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 79 = 0$
 2. (a) $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 18 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 12y + 23 = 0$
 3. (a) $x^2 + y^2 + 36x - 24y = 239$ (b)

• $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 = 12$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 12 + 4 + 9$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

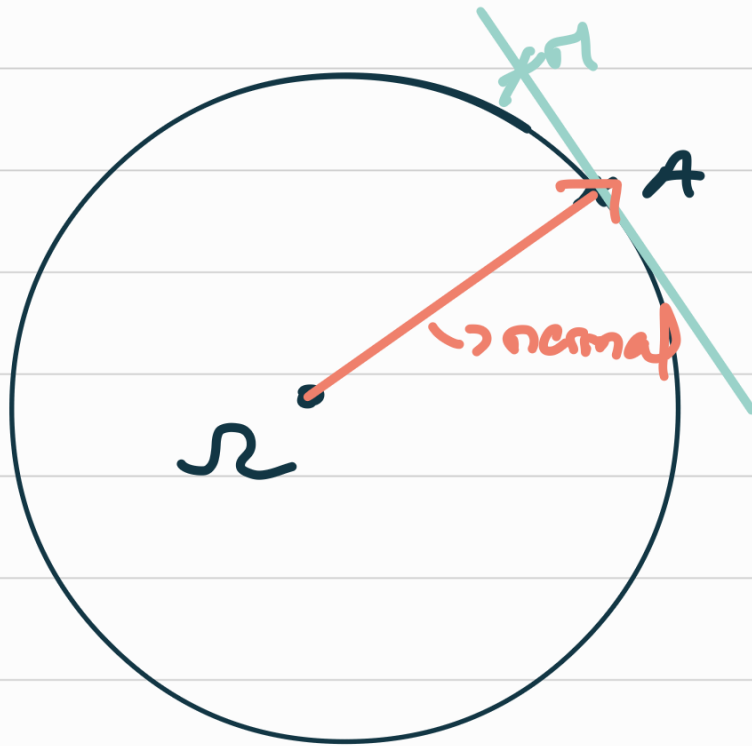
donc $\mathcal{C}((2; 3); 5)$

4. $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $r = 5$ en $A(1; 7)$ et $B(-6; 6)$

Exercice 8. Tangentes à un cercle — ★☆☆
 Dans chacun des cas suivants, déterminer les équations cartésiennes des tangentes au cercle données aux points donnés.

1. $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-2; 3)$ et de rayon $r = 5$ en $A(1; 7)$ et $B(-6; 6)$
2. $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(4; 1)$ passant par $A(8; 0)$ en A et $B(3; -3)$
3. $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-1; 5)$ passant par $A(1; 1)$ en A et $B(-5; 3)$

1) . $\vec{\Omega A}(3; 4)$: normal à T_A



$$M(x; y) \in T_A$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \perp \vec{\Omega A}$$

Exercice 12. Éléments caractéristiques du cercle — ☆☆☆

Dans chacun des cas suivants, déterminer, si ils existent, le centre et le rayon du seul cercle passant par les points fournis

1. (a) $A(-2; 0)$ $B(1; 7)$ $C(5; 7)$ (b) $A(3; 2)$ $B(3; -6)$ $C(-3; -4)$
2. (a) $A(-3; 5)$ $B(6; 6)$ $C(-2; -4)$ (b) $A(3; 7)$ $B(-2; 4)$ $C(1; -1)$
3. (a) $A(-4; 1)$ $B(0; 3)$ $C(5; -2)$ (b) $A(-4; -3)$ $B(3; 2)$ $C(-2; 9)$

$$\begin{cases} (\Delta_1) : \text{médiane de } [AB] \\ (\Delta_2) : \text{médiane de } [BC] \end{cases}$$

$$I_1 \left(-\frac{1}{2} ; \frac{7}{2} \right) \quad \vec{n} = \vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$I_2 (3 ; 7) \quad \vec{n} = \vec{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\Delta_1) : 3x + 7y - 23 = 0$$

$$(\Delta_2) : x - 3 = 0$$

Le centre du cercle est
l'intersection des médiatrices

$$\begin{cases} 3x + 7y - 23 = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

donc $\Omega(3; 2)$.

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{(-2-3)^2 + (0-2)^2} \\ &= \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}. \end{aligned}$$

Exercice 13. Problème récapitulatif – ★☆☆

Soit la droite (Δ) d'équation $x - 2y - 3 = 0$ et la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 8x + 15$
Soit les points $E(0; 1)$ et $F(-1; 0)$

1. Déterminer les deux points d'intersections de (Δ) et de $\mathcal{P}$.

Nous les noterons C et D avec C le point ayant la plus petite abscisse. ✓

2. Soit le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle CEF

(a) Déterminer l'équation de $\mathcal{C}$ et en déduire ses éléments caractéristiques. ✓

(b) Déterminer les coordonnées du second point d'intersection B entre $\mathcal{C}$ et (Δ) ✓

3. Nous notons (T_C) la tangente à $\mathcal{C}$ en C

(a) Déterminer une équation cartésienne de (T_C)

(b) Montrer que (T_C) est également la tangente à $\mathcal{P}$ en C

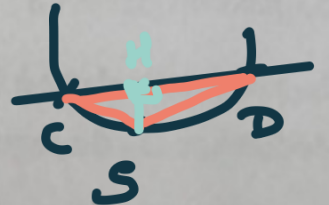
4. On note S le sommet de la parabole $\mathcal{P}$

(a) Déterminer les coordonnées de S $(4; -1)$

(b) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de S sur (Δ)

(c) En déduire l'aire du triangle SCD

5. Vérifier l'ensemble des résultats obtenus en réalisant un graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ judicieusement choisi.



3) a) $\Omega(1; -1)$

$$C(3; 0) \in (T_C)$$

$$\vec{\Omega C}(2; 1) \text{ normal } \vec{e}(T_C)$$

$$\forall (x, y) \in (T_C) \\ \text{ssi: } \vec{C\Omega} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-0 \end{pmatrix} = 0 \quad \vec{\Omega C} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si: } 2(x-3) + y = 0$$

$$\text{si: } \boxed{2x + y - 6 = 0} \rightarrow y = \underline{-2x + 6}$$

$$\textcircled{b} \text{ (P) : } y = \underbrace{x^2 - 8x + 15}_{f(x)}$$

$$\text{(Tc) : } y = f'(3)(x-3) + f(3)$$

$\textcircled{b} \text{ C}(3;0)$

$$f'(x) = 2x - 8 \quad / \quad f'(3) = 2 \times 3 - 8 = -2$$

$$f(3) = 3^2 - 8 \times 3 + 15 = 9 - 24 + 15 = 0$$

$$y = -2(x-3) \quad 0$$

$$= -2x + 6 \quad 0$$

$$= -2x + 6$$

donc (T_C) est tangente en C
à $(\mathcal{C})$.

4) a) $f(x) = x^2 - 8x + 15$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \times 1} = 4$$

$$\beta = f(4) = 4^2 - 8 \times 4 + 15 = -1$$

donc $S(4; -1)$.

$$b) \vec{SH} \begin{pmatrix} x-4 \\ y+1 \end{pmatrix} \perp \vec{v}_\Delta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 5y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{17}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{matrix}$$

$$c) \text{fire}(\text{SCD}) = \frac{\text{CD} \times \text{SH}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{CD} &= \sqrt{\left(\frac{11}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{5}{4} - 0\right)^2} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

$$SH = \sqrt{\left(\frac{17}{5} - 4\right)^2 + \left(\frac{1}{5} + 1\right)^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow c_{\text{fire}}(SCD) = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{4} \times \frac{3\sqrt{5}}{5}}{2}$$

$$= \frac{15}{8}$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer si elles existent les intersections des cercles $\mathcal{C}$ et des paraboles $\mathcal{P}$ donnés

1. $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 1$ et $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(0; 0)$ et de rayon $R = 1$
2. $\mathcal{P}$ d'équation $y = -x^2 + 5$ et $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(0; 7)$ et de rayon $R = 2$
3. $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 6x + 8$ et $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(3; -1)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$
4. $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 2x - 1$ et $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(1; \frac{7}{8})$ passant par $A(4; 0)$

$$1) \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (x^2 - 1)^2 = 1$$

$$x^2 + x^4 - 2x^2 + \cancel{1} = \cancel{1}$$

$$x^4 - x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 1) = 0$$



$$x^2 = 0$$



$$x = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$



$$x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$2) \begin{cases} y = -x^2 + 5 \\ x^2 + (y-7)^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + (-x^2 + 5 - 7)^2 = 4$$

$$x^2 + (-x^2 - 2)^2 = 4$$

$$x^2 + x^4 + 4x^2 + \cancel{4} = \cancel{4}$$

$$x^4 + 5x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 + 5) = 0$$

$$\swarrow$$

$$x^2 = 0$$

$$\searrow$$

$$x^2 + 5 = 0$$

$$\downarrow$$

$$x = 0$$

$$x^2 = -5 \quad \times$$

$$3) \quad y = x^2 - 6x + 8$$

$$\left\{ (x-3)^2 + (y+1)^2 = 2 \right.$$

$$(x-3)^2 + (x^2 - 6x + 8 + 1)^2 = 2$$

$$(x-3)^2 + \underbrace{(x^2 - 6x + 9)} = 2$$

$$(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 6x + 9)$$

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x^3 + 36x^2 - 54x + 9x^2 - 54x + 81$$

$$= x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$$