

Partie B : Etude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \left(2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 \right)$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

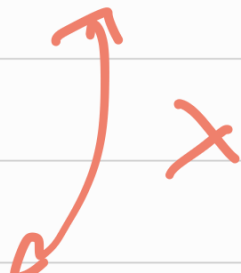
- 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
En déduire que C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.
- 2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.
- 3. On admet que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln(x))^2 + \ln(x) - 1$.
 - a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4\ln(x) + 1)$.
 - b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
 - c. Montrer que la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

2) $f(x) = x \ln(x)^2 \left(2 - \frac{3 \ln(x)}{\ln(x)^2} + \frac{2}{\ln(x)^2} \right)$

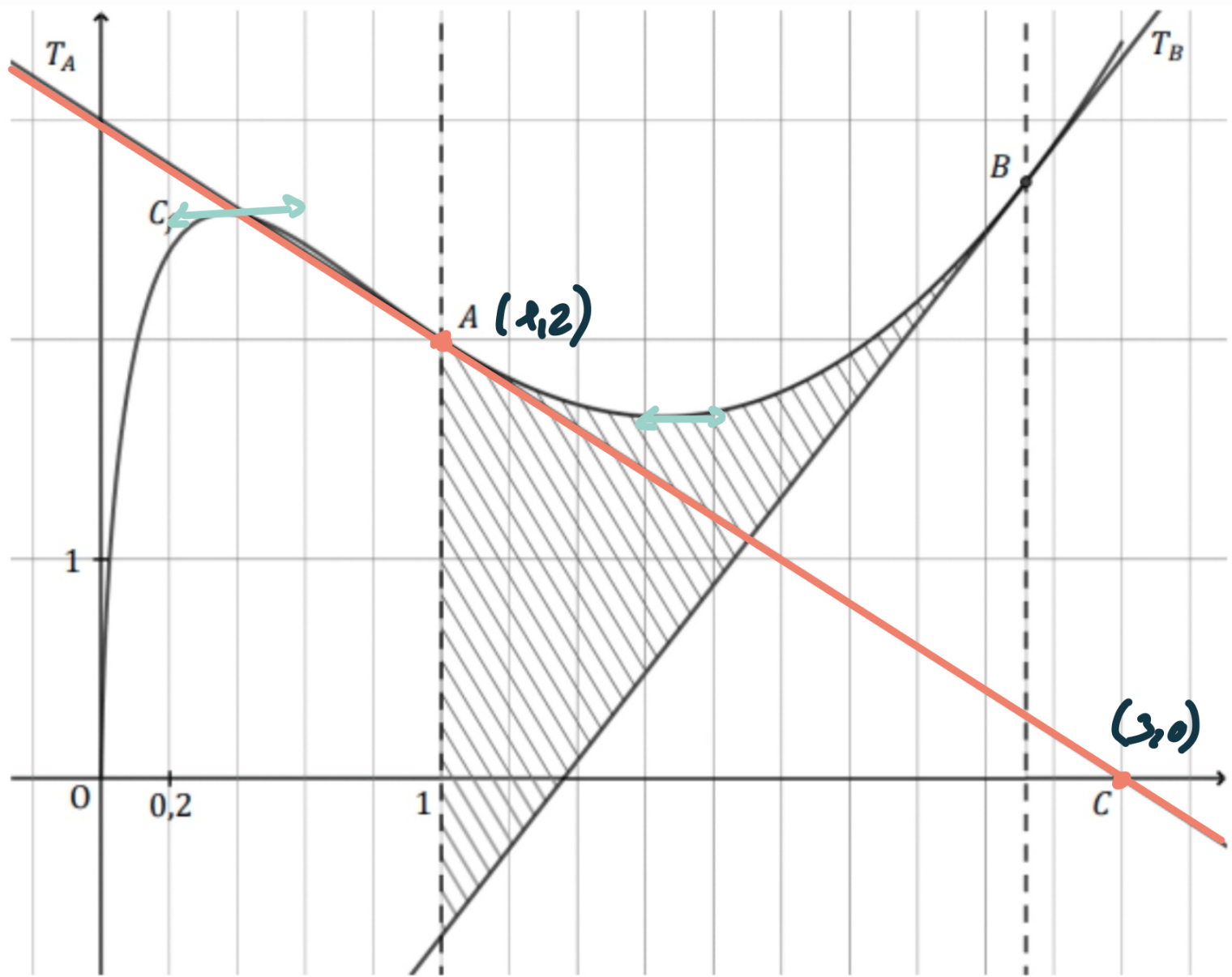
$$= x \ln(x)^2 \left(2 - \frac{3}{\ln(x)} + \frac{2}{\ln(x)^2} \right)$$

$\alpha \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{3}{h(x)} + \frac{2}{h(x)^2} = 2$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x h(x)^2 = +\infty$$


$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0; 3]$?
3. Quel est le signe de $f''(0, 2)$?

$$1) f'(1) = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{0 - 2}{3 - 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Partie C : Calcul d'aire

- 1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.
- 2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x \ln(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4}$.
- 3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f , la tangente T_B , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
On admet que $\int_1^e x (\ln(x))^2 dx = \frac{e^2 - 1}{4}$.
En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

1) $y = f'(e)(x - e) + f(e)$

$$f'(e) = (2 \ln(e))^2 + \ln(e) - 1$$
$$= 2 + 1 - 1 = 2$$

$$f(e) = e(2 - 3 + 2)$$
$$= e$$

$$y = 2(x - e) + e = 2x - 2e + e = 2x - e$$

$$3) \quad \mathcal{A} = \int_1^e f(x) - (2x - e) \, dx$$

$$= \int_1^e x(2h(x)^2 - 3h(x) + 2) - 2x + e \, dx$$

$$= \int_1^e 2xh(x)^2 - 3xh(x) + \cancel{2x} - \cancel{2x} + e \, dx$$

$$= 2 \int_1^e xh(x)^2 \, dx - 3 \int_1^e xh(x) \, dx + \int_1^e e \, dx$$

$$= 2 \times \frac{e^2 - 1}{2} - 3 \times \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$+ [ex]_1^e$$

$$= \frac{e^2 - 1}{2} - \frac{3}{4}(e^2 + 1) + (e^2 - e)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4} + e^2 - e$$

$$= \frac{3}{4}e^2 - \frac{5}{4} - e \quad \underline{u.a.}$$

Exercice 1 (5 points)

$u = x \quad v = e^{-2x}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la dérivée de la fonction f .

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1. Pour tout réel x , on a $f'(x) = (-2x + 1)e^{-2x}$.

✓

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-2x}$.

✓

Affirmation 3. La fonction f est convexe sur $] -\infty; 1]$.

✗

Affirmation 4. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

✓

Affirmation 5. L'aire du domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\frac{1}{4} - \frac{3e^{-2}}{4}$.

✓

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2e^{-2x} - 2(-2x+1)e^{-2x} \\ &= \underbrace{e^{-2x}}_{>0} (4x - 4) \end{aligned}$$

$$4x - 4 > 0 \iff 4x > 4$$

$$\iff x > 1$$

$$f'(x) = (-2x + 1) \underbrace{e^{-2x}}_{>0}$$

$$-2x + 1 > 0 \Leftrightarrow -2x > -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	$+$	$\bigcirc$	$-$
f	$-\infty$	$0,2$	∞

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x}_{-\infty} \underbrace{e^{-2x}}_{+\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \underbrace{e^{-2x}}_0 = 0 \text{ par c.c}$$

- f est continue sur $] -\infty; \frac{1}{2}]$
- f est strictement croissante sur $] -\infty; \frac{1}{2}]$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty < -1$
et $f(\frac{1}{2}) \approx 0,8 > -1$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $] -\infty; \frac{1}{2}]$

De plus, sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$,
 $f(x) > -1$.

$$\int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 \underset{v}{x} \underset{u'}{e^{-2x}} dx$$

$$= \left[\underset{v}{x} \times \underset{u}{-\frac{1}{2} e^{-2x}} \right]_0^1 - \int_0^1 \underset{v'}{1} \times \underset{u}{-\frac{1}{2} e^{-2x}} dx$$

$$= \left(1 \times -\frac{1}{2} e^{-2 \times 1} - 0 \right) + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \times \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-2} - \left(-\frac{1}{2} e^0 \right) \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \bar{e}^2 - \frac{1}{4} \bar{e}^2 + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{3}{4} \bar{e}^2 + \frac{1}{2}$$