

Trigonalisation

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \quad \text{②} \quad \leftarrow \text{pb.}$$

$$\bullet E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \leftarrow e_1$$

$$E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \rightarrow e_2$$

$\Rightarrow$ il faut trouver un autre vecteur e_3 tel que $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

Ae_3

on pose $e_3 = (1, 0, 0)$

- vérifie que $\{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$

$$\hookrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

$$\bullet A e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2e_3 + \alpha e_2 + \beta e_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha + \beta \\ -\alpha + \beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha + \beta \\ -\alpha + \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = -2 \\ -(-2) + 1 = 3 \end{cases}$$

donc $Ae_3 = 2e_3 - 2e_2 + e_1$

Ainsi A est trigonalisable
et on pose :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

telles que $A = P T P^{-1}$.

Jordanisation

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_A(1) = 1$$

$$m_g(1) = 1$$

$$m_A(2) = 2$$

$$\bullet P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

$$m_g(1) = 1$$

$$\bullet E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \leftarrow e_1$$

$$E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\hookrightarrow m_g(2) = 1 \quad \rightarrow e_2$$

Jordan en dim 3

- 3 v.p distinctes: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$(), J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_3} \end{pmatrix}$$

- λ_1 v.p simple et λ_2 v.p double

$$* m_a(\lambda_2) = 2 = m_g(\lambda_2)$$

$$(), J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

m_g = nombre de blocs

m_a = somme totale des tailles des blocs

$$* m_a(\lambda_2) = 2 \text{ et } m_g(\lambda_2) = 1$$

$$\hookrightarrow \overline{J} = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 1 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

• λ_1 v.e triple

$$* m_a(\lambda_1) = 3 = m_g(\lambda_1)$$

$$\hookrightarrow \overline{J} = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_1} \end{pmatrix}$$

$$* m_a(\lambda_1) = 3 \text{ et } m_g(\lambda_1) = 2$$

$$\hookrightarrow \overline{J} = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_1} & 1 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{\lambda_1} \end{pmatrix}$$

$$* m_a(\lambda_1) = 3 \quad \text{et} \quad m_g(\lambda_1) = 1$$

$$\hookrightarrow J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$m_a(2) = 2 \quad \text{et} \quad m_g(2) = 1$$

$$\hookrightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow e_2$
 $\rightarrow e_3$

$\downarrow Ae_3$

$\rightarrow$ on pose $e_3(x; y; z)$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 1x e_2$$

on trouve $e_3(-1; -1; 0)$

donc A admet une forme de Jordan et on a :

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

telle que $A = P \bar{J} P^{-1}$.

Polynôme minimal

def: Le polynôme minimal de f est le polynôme unitaire annulateur de degré minimal.

prop: Le polynôme minimal divise tout autre polynôme annulateur.

↳ en particulier il divise le polynôme caractéristique.

théorème: f est diagonalisable ssi son polynôme minimal est scindé et il a toutes ses racines simples.

Caractère: J est trigonalisable
ssi son polynôme minimal est scindé.

exemple:

$$\bullet A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \textcircled{-} (x+1)(x+2)(x-3)$$

$$\hookrightarrow m_A(x) = (x+1)(x+2)(x-3).$$

$$\bullet A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = - (x-1)(x+2)^2$$

• soit $m_A(x) = (x-1)(x+2)$

• soit $m_A(x) = (x-1)(x+2)^2$

par choisir on calcule :

$$m_A(A) = (A - I)(A + 2I).$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $m_A(x) = (x-1)(x+2)$.

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_A(X) = - (X - 1)^3$$

E_1 • $m_A(X) = (X - 1)$

- $m_A(X) = (X - 1)^2$

- $m_A(X) = (X - 1)^3$

pour choisir on calcule :

$$m_A(A) = (A - 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\neq O_3$$

$$m_A(A) = (A - 1)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$\text{def } m_A(x) = (x - 1)^2.$$