

Exercice 1 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (3x^2 + 5)e^{2x}$.

1. De quelle fonction f , F est-elle une primitive ?

2. Donner F_1 une autre primitive de f .

3. Donner l'expression de F_2 , la primitive de f qui vérifie $F_2(0) = 2$.

$$\begin{aligned} 1) \quad F'(x) &= 6xe^{2x} + (3x^2 + 5) \cdot 2e^{2x} \\ &= e^{2x}(6x + 6x^2 + 10) \\ &= e^{2x}(6x^2 + 6x + 10). \end{aligned}$$

$$2) \quad F_1(x) = (3x^2 + 5)e^{2x} + 1$$

$$3) \quad F(x) = (3x^2 + 5)e^{2x} + C$$

$$F(0) = 5 + C = 2 \Rightarrow C = -3$$

$$\text{donc} \quad F_2(x) = (3x^2 + 5)e^{2x} - 3.$$

Exercice 3 Dans chacun des cas suivants, déterminer $F(x)$ l'expression d'une primitive de f (de préférence la plus simple possible).

1. $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$ ✓

2. $f(x) = 2x^3$ ✓

3. $f(x) = 7x^5 + 2x^4 - 3x + 8$

4. $f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{5}{x^2} + 7x - 4$

5. $f(x) = \frac{6}{(2x+4)^2}$
 $u \rightarrow u' = 2$

6. $f(x) = \frac{2x(x+4)e}{(x^2+8x-1)^2}$
 $2x+8 \rightarrow 2x+8$

7. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

8. $f(x) = (-6x+3)e^{\frac{x^2-x+5}{2x-1}}$
 $\rightarrow (2x-1)$

9. $f(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}$
 $3x^2+1 \rightarrow 2\sqrt{x}$

3) $F(x) = \frac{7}{6}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 8x$

4) $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^4}{4} - 5x - \frac{1}{1} \times \frac{1}{x}$
 $+ \frac{7}{2}x^2 - 4x$

$= \frac{x^4}{8} + \frac{5}{x} + \frac{7}{2}x - 4x$

$\frac{1}{x^n}, n \geq 2 \rightarrow -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$

5) $F(x) = 6 \times \frac{1}{2}x - \frac{1}{1} \times \frac{1}{2x+4}$
 $= \frac{-3}{2x+4}$

$$\begin{aligned}
 6) \quad F(x) &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2-1} x \frac{1}{(x^2+8x-1)^{2-1}} \\
 &= -\frac{1}{2} x \frac{1}{x^2+8x-1}
 \end{aligned}$$

$$8) \quad F(x) = -3 e^{x^2-x+5}.$$

$$9) \quad F(x) = 2 \sqrt{x^3+x}$$

$$y' = ay + b$$

$$\hookrightarrow y(x) = Ke^{\frac{ax}{a}} - \frac{b}{a}, K \in \mathbb{R}$$

Exercice 3

Déterminer la solution de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale proposée.

1. $y' = 2y; y(0) = 1$

2. $y' = 4y - 3; y(0) = -1$

3. $y' = -y + 1; y(2) = 6$

1) $y' = 2y$

$$\hookrightarrow y(x) = Ke^{2x}, K \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = Ke^0 = K = 1$$

donc

$$y(x) = e^{2x}$$

$$2) \quad y(x) = k e^{4x} + \frac{3}{4}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$y(0) = k + \frac{3}{4} = -1$$

$$\Rightarrow k = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

1) $y' = -2y \Rightarrow y(x) = ke^{-2x}, k \in \mathbb{R}$

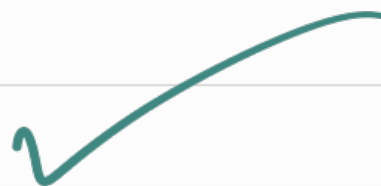
2) Montrer que f est solution de (E).

$$f'(x) = -9e^{-2x} + 3e^{-3x}$$

$$f'(x) + 2f(x) = -9e^{-2x} + 3e^{-3x} + 2\left(\frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}\right)$$

$$= -\cancel{9e^{-2x}} + 3e^{-3x} + \cancel{9e^{-2x}} - 6e^{-3x}$$

$$= 3e^{-3x}$$



3) Donner les solutions.

↪

$$y(x) = k e^{-2x} + \underbrace{\frac{9}{2} e^{-x} - 3 e^{-3x}}_{f(x)},$$

$k \in \mathbb{R}.$

~~_____~~