

Exercice 3 :

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$(E) : y' - \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right) y = \sin x$$

$$(E_0) : y' - y = 1$$

1) Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) .

2) Soit f et g deux fonctions dérivables sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ telles que

$$f(x) = g(x) \sin x$$

Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0) .

3) Déterminer la solution f de (E) telle que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

Lycée Guillaume Apollinaire

1) $y(x) = C e^x - 1, C \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

2) $\Rightarrow$ Supposons f est solution de (E)

alors $f' - \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right) f = \sin x$

or $f(x) = g(x) \sin(x)$

$$\text{et } f'(x) = g'(x) \sin(x) + g(x) \cos(x)$$

d'où :

$$g'(x) \sin(x) + g(x) \cos(x) = \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$\times g(x) \sin(x) = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) \sin(x) + \cancel{g(x) \cos(x)} - g(x) \sin(x) = \frac{\cancel{\cos(x)}}{\cancel{\sin(x)}} \times \cancel{g(x) \sin(x)} = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) \sin(x) - g(x) \sin(x) = \sin(x)$$

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \text{ donc } \sin(x) \neq 0$$

$$\text{d'où } g'(x) - g(x) = 1$$

donc g est solution de (E) .

⇐ Supposons que g est solution de (E_0) .

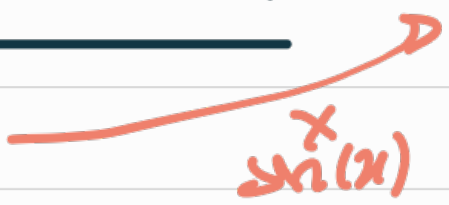
$$\text{on a : } g' - g = 1$$

$$\text{or } g(x) = \frac{f(x)}{\sin(x)}.$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)\sin(x) - f(x)\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

d'où

$$\frac{f'(x)\sin(x) - f(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{f(x)}{\sin(x)} = 1$$



⇒

$$\frac{f(x)\sin(x)}{\sin^2(x)} - \frac{f(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{f(x)\sin(x)}{\sin^2(x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sin(x)} - \frac{f(x)}{\sin^2(x)} (\cos(x) + \sin(x)) = 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x) - \frac{f(x)}{\sin(x)} (\cos(x) + \sin(x)) = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + 1 \right) = \sin(x)$$

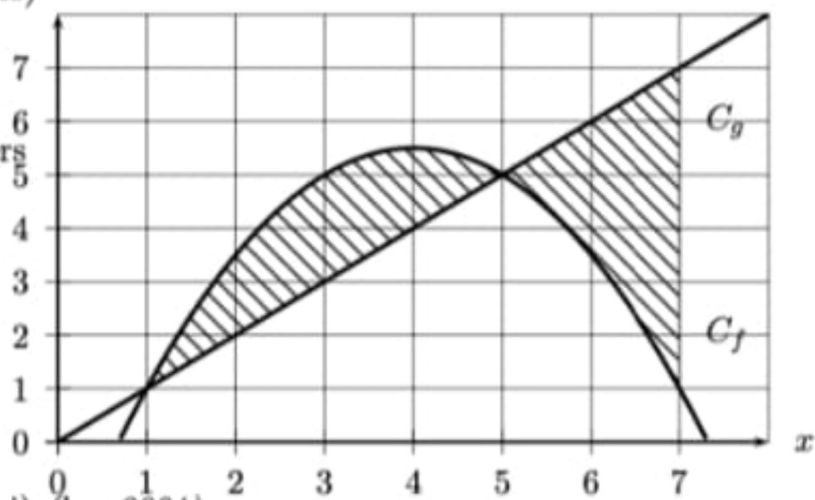
donc f est solution de (E).

exercice 19 : (aire de la surface entre deux courbes)

1. estimer graphiquement un encadrement de l'aire de la surface hachurée I par deux entiers

2. sachant que :
$$\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{2} \\ g(x) = x \end{cases}$$

déterminer la valeur exacte de I
(considérer deux surfaces)



$$I = \int_1^5 f(x) - g(x) dx + \int_5^7 g(x) - f(x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x \right]_1^5 - \left[\right]_5^7$$

$$= \left(-\frac{1}{6} \times 5^3 + \frac{3}{2} \times 5^2 - \frac{5}{2} \times 5 \right) - \left(\right)$$

Partie B : Etude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \left(2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 \right)$$

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.

↙ concave

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^e x \ln(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f , la tangente T_B , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

On admet que $\int_1^e x (\ln(x))^2 dx = \frac{e^2 - 1}{4}.$

En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

2)
$$\int_1^e x \ln(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x^2 \times \frac{1}{x} dx$$

= . . .

3)
$$\int_1^e f(x) - (2x - e) dx$$

$$= \int_1^e 2x \ln(x)^2 - 3x \ln(x) + \cancel{2x} - \cancel{2x} - e dx$$

$$= 2 \int_1^e x P_n(x)^2 dx$$

$$- 3 \int_1^e x P_n(x) dx - \int_1^e e dx$$

$$= 2 \times \left(\frac{e^2 - 1}{4} \right) - 3 \times \left(\frac{e^2 + 1}{4} \right)$$

$$- [ex]_1^e$$

$$= \dots$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$$

<

Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la dérivée de la fonction f .

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1. Pour tout réel x , on a $f'(x) = (-2x + 1)e^{-2x}$.

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = e^{-2x}$.

Affirmation 3. La fonction f est convexe sur $] -\infty; 1]$.

Affirmation 4. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5. L'aire du domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\frac{1}{4} - \frac{3e^{-2}}{4}$.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 xe^{-2x} dx \\ &= \left[x \times -\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 -\frac{1}{2} e^{-2x} \times 1 dx \\ &= \frac{-1}{2} e^{-2} - \left[\frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{-1}{2} e^{-2} - \left(\frac{1}{4} e^{-2} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$