

Dénombrement

exercice 3 :

$$1) . C_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!}$$
$$= \frac{7!}{4!} = 210$$

donc il y a 210 3-uplets
d'éléments distincts de E

$$\cdot \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!}$$
$$= 210$$

donc il y a 210 combinaisons
à 4 éléments de F .

Donc l'affirmation est
fausse.

$$2) \binom{18}{3} \times \binom{14}{3}$$

$$= \frac{18!}{3!(18-3)!} \times \frac{14!}{3!(14-3)!}$$

$$= 816 \times 364$$

$$= 297 024$$

donc l'affirmation est vraie.

$$3) \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

donc il y a 60 anagrammes.

Donc l'affirmation est fautive.

EXERCICE 2

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

On s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64. Par exemple, « gP3g » est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte et les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3.
 - a. Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
 - b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
 - c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
 - d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

1). Il y a $64 \times 64 \times 64 \times 64$
 $= 64^4 = 16\,777\,216$ nombre
de séquences possibles.

2) $64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15\,249\,024$

$$A_{64}^4 = \frac{64!}{(64-4)!}$$

$$3) a) 63^4 = 15\ 752\ 961$$

$$b) 64^4 - 63^4 = 1\ 024\ 255$$

$$c) \binom{4}{1} \times 63^3 =$$

$A \rightarrow 1$

$$d) \binom{4}{2} \times 63^2 = 6 \times 3\ 969$$

$2A$

$$= 23\ 814.$$

Exercice 4 (4 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$ où y est une fonction de la variable t définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $h(t) = \frac{1}{120}$.
Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1) .

2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1) .

$$\begin{aligned} 1) \quad h'(x) + 0,48 h(x) &= 0 + 0,48 \times \frac{1}{120} \\ &= \frac{0,48}{120} \\ &= 0,004 \\ &= \frac{1}{250} \end{aligned}$$

donc h est solution de (E_1)

$$2) \quad y(x) = k e^{-0,48x}, \quad \underline{k \in \mathbb{R}}$$

3) $y(x) = k e^{-0,48x} + \frac{1}{120},$
 $x \in \mathbb{R}$

On rappelle que t désigne le temps écoulé, en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.
On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde (m.s^{-1}), en fonction de t , par une fonction v définie sur $[0; +\infty[$.

On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée ;
- la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,6y = e^{-0,6t}$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y .

On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 m.s^{-1} , c'est-à-dire $v(0) = 12$.

1. a. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + 0,6y = 0$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0; +\infty[$.

b. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = te^{-0,6t}$.

Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E) .

c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0; +\infty[$.

d. En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}$$

1) a) $y(x) = k e^{-0,6x}, \quad k \in \mathbb{R}$

b) $g'(t) = e^{-0,6t} - 0,6t e^{-0,6t}$

$$\begin{aligned} g'(t) + 0,6g(t) &= e^{-0,6t} - 0,6t e^{-0,6t} \\ &\quad + 0,6t e^{-0,6t} \\ &= e^{-0,6t} \end{aligned}$$

✓

c) $y(t) = k e^{-0,6t} + t e^{-0,6t}, \underline{k \in \mathbb{R}}$

d) $v(t) = k e^{-0,6t} + t e^{-0,6t}$

$$v(0) = 12$$

$$k e^{-0,6 \times 0} + 0 \times e^{-0,6 \times 0} = 12$$

$$k = 12.$$

done $v(t) = 12 e^{-0,6t} + t e^{-0,6t}$
 $= (12 + t) e^{-0,6t}$