

Worksheet 4

exercice 1 :

1) $\Phi(P, Q) := \sum_{k=0}^n P(k)Q(k).$

• symétrique : Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\begin{aligned}\Phi(P, Q) &= \sum_{k=0}^n P(k)Q(k) \\ &= \sum_{k=0}^n Q(k)P(k) \\ &= \Phi(Q, P)\end{aligned}$$

donc Φ est symétrique.

• bilinéarité: Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[x]$,
et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}_n[x]$

$$\Phi(\lambda P_1 + \mu P_2, Q)$$

$$= \sum_{k=0}^n (\lambda P_1 + \mu P_2)(k) Q(k)$$

$$= \sum_{k=0}^n \lambda P_1(k) Q(k) + \mu P_2(k) Q(k)$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^n P_1(k) Q(k) + \mu \sum_{k=0}^n P_2(k) Q(k)$$

$$= \lambda \Phi(P_1, Q) + \mu \Phi(P_2, Q)$$

donc Φ est linéaire à gauche

De plus, comme Φ est symétrique
alors elle est linéaire.

• définie positive: Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\rightarrow \Phi(P, P) = \sum_{k=0}^n P^2(k) \geq 0$$

$$\rightarrow \text{si } P = 0, \text{ alors } \Phi(P, P) = \sum_{k=0}^n 0 = 0 \checkmark$$

• si $\Phi(P, P) = 0$, alors on a

$$\sum_{k=0}^n \underbrace{P^2(k)}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow P(0) = \dots = P(n) = 0$$

$\Rightarrow$ donc P possède
 $n+1$ - racines
distinctes

or $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc P ne
peut pas avoir plus de n
racines distinctes.

$$\text{Donc } P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

donc $\phi(p, p) = c \Leftrightarrow p = c$

Donc ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.