

Sens de variations

20 (u_n) est une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2 - 10$.

À partir de quel rang cette suite est-elle croissante ?

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \cancel{u_n} + n^2 - 10 - \cancel{u_n} \\ &= n^2 - 10 \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

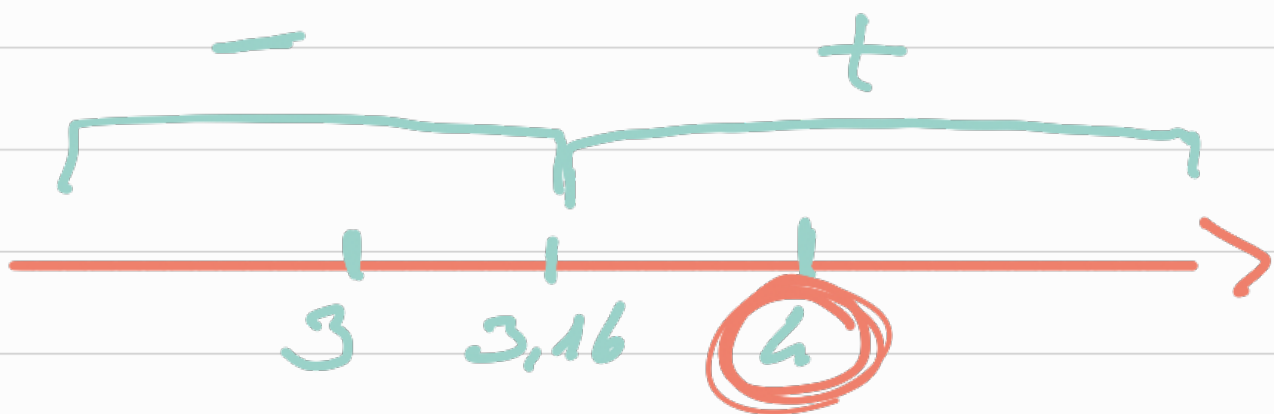
$$\Leftrightarrow n^2 - 10 > 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 > 10 \Leftrightarrow n > \sqrt{10} \\ \qquad \qquad \qquad = 3.16$$

$$n^2 > a \Leftrightarrow n > \sqrt{a}$$

$$n^2 \leq a \Leftrightarrow 0 \leq n \leq \sqrt{a}$$

donc à partir du rang 4.



exercice :

$$u_n = n^2$$

$$u_{n+1} - u_n$$

$$= (n+1)^2 - (n^2)$$

$$= \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2}$$

$$= 2n + 1$$

$$> 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} > u_n$$

donc (u_n) est croissante

- $v_n = 3 - 2n$

$$v_{n+1} - v_n$$

$$= 3 - 2(n+1) - (3 - 2n)$$

$$= \cancel{3} - \cancel{2n} - 2 - \cancel{3} + \cancel{2n}$$

$$= -2$$

$$< 0, \text{ et } v_{n+1} \leq v_n$$

donc (v_n) est décroissante.

- $w_n = (-1)^n$

α $w_0 = 1$ $w_1 = -1$

$w_2 = 1$ $w_3 = -1$

(w_n) ni croissante ni décroissante.

- $u_n = 3^n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{\cancel{n}+1}}{3^{\cancel{n}}} = 3^1 = 3 > 1$$

donc $u_{n+1} > u_n$ et $(u_n) \nearrow$.

$$\cdot t_n = \frac{n}{n+1}$$

$$t_{n+1} - t_n$$

$$= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$$


$$= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1) > 0}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - (n^2 + 2n)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n^2} - \cancel{2n}}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

> 0

donc $t_{n+1} > t_n$ et (t_n)
est croissante.

$$, w_n = 2e^{-n}$$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\cancel{2}e^{-(n+1)}}{\cancel{2}e^{-n}}$$

$$= \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}} = \frac{\cancel{e^{-n}} \times e^{-1}}{\cancel{e^{-n}}}$$

$$= e^{-1} < 1$$

donc $w_{n+1} \leq w_n$ et

(w_n) est décroissante.

$$\bullet t_n = \frac{2n-1}{n+4}$$

on pose $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$, $x \in \mathbb{R}_+$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,$$

$$u(x) = 2x-1 \quad u'(x) = 2$$

$$v(x) = x+4 \quad v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{2(x+4) - (2x-1) \times 1}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{2x+8-2x+1}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{9}{(x+4)^2} > 0$$

x	0	$+\infty$
f'		+
f		

donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc (t_n) est croissante.

$$= 3n + 4 > 0$$

$$= -5n - 1 < 0$$

$$= 2n - 3 \Rightarrow 2n - 3 > 0$$

$$2n > 3$$

$$n > \frac{3}{2} = 1,5 \Rightarrow \underline{n=2}$$

- $u_n = 4n - 7$

$$u_{n+1} - u_n$$

$$= 4(n+1) - 7 - (4n - 7)$$

$$= \cancel{4n} + 4 - \cancel{7} - \cancel{4n} + \cancel{7}$$

$$= 4 > 0.$$

$$u_{n+1} - u_n = \dots$$

$$= -7n + 2$$

A partir de quel rang la suite (u_n) est décroissante ?

$$-7n + 2 \leq 0$$

$$-7n \leq -2$$

$$n \geq \frac{-2}{-7} \approx 0,28 \dots$$

donc à partir du rang 1