

Variables aléatoires

Exercice 1 :

Un concessionnaire vend entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine.

Soit X la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre de voitures vendues. X suit la loi de probabilité suivante :

k	0	1	2	3	4
$p(X=k)$	0,26	0,23	a	0,15	0,05

1. Calculer la valeur de a .
2. a) Calculer $p(X > 2)$.
b) Calculer $p(X \leq 3)$.
3. Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat.
4. Calculer la variance et l'écart-type de cette variable aléatoire.

$$1) \quad 0,26 + 0,23 + a + 0,15 + 0,05 = 1$$

$$\Rightarrow 0,69 + a = 1$$

$$\Rightarrow a = 1 - 0,69 = 0,31$$

$$\begin{aligned} 2) \quad a) \quad P(X > 2) &= P(X=3) + P(X=4) \\ &= 0,15 + 0,05 \\ &= 0,20 \end{aligned}$$

$$b) \quad \mathbb{P}(X \leq 3)$$

$$= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) \\ + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)$$

$$= 0,26 + 0,23 + 0,31 + 0,15$$

$$= 0,95.$$

$$3) \quad E[X] = 0 \times 0,26 + 1 \times 0,23 \\ + 2 \times 0,31 + 3 \times 0,15 \\ + 4 \times 0,05$$

$$= 1,5$$

En moyenne, le concessionnaire

vend 1,5 voitures par semaine.

$$4) \quad \underbrace{V(X)}_{\text{variance}} = \underbrace{E[X^2]} - (E[X])^2$$

$$\hookrightarrow E[X^2] = k^2 \times P(X=k) + \dots$$

$$V(X) = \left[\begin{aligned} &0^2 \times 0,26 + 1^2 \times 0,23 \\ &+ 2^2 \times 0,31 + 3^2 \times 0,15 \\ &+ 4^2 \times 0,05 \end{aligned} \right] - (1,5)^2$$

$E[X^2]$

$$= 3,62 - 2,25$$

$$= 1,37$$

$$\underline{\sigma(X)} = \sqrt{V(X)}$$

écart-type

$$\sigma(x) = \sqrt{1,37}$$

$$\approx \pm 1,17$$

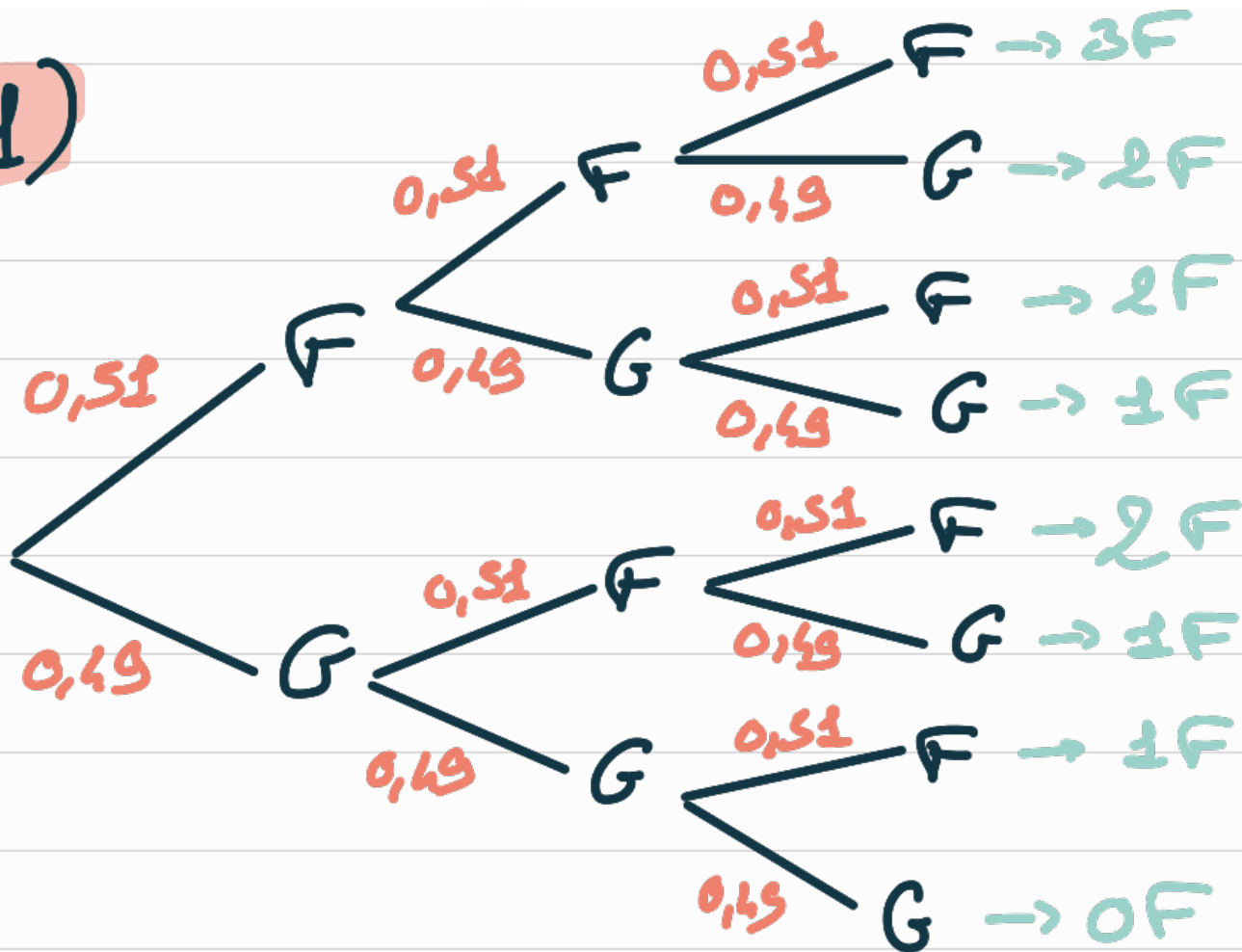
Exercice 2 :

Dans une maternité, on estime qu'à la naissance, la probabilité qu'un enfant soit une fille est égale à 0,51. On choisit de manière indépendante trois enfants nés dans cette maternité. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de filles parmi ces trois enfants.

1. Représenter l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité qu'exactement deux enfants soient des filles.
3. Décrire l'événement $X = 0$ et calculer sa probabilité.
4. Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X .

x	0	1	2	3
$p(X=x)$	0,118	0,367	0,382	0,133

5. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire et interpréter.
6. Calculer la variance et l'écart-type de cette variable aléatoire.



2)

$$P(X=2) = 0,51 \times 0,51 \times 0,49 + 0,51 \times 0,49 \times 0,51 + 0,49 \times 0,51 \times 0,51$$

$$\approx 0,382$$

3) "X=0" : est P'écarterait
ne pas avoir de filles.

$$\begin{aligned} P(X=0) &= 0,49 \times 0,49 \times 0,49 \\ &\approx 0,118 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) P(X=3) &= 0,51 \times 0,51 \times 0,51 \\ &\approx 0,133 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= 0,51 \times 0,49 \times 0,49 \\ &\quad + 0,49 \times 0,51 \times 0,49 \\ &\quad + 0,49 \times 0,49 \times 0,51 \\ &\approx 0,367 \end{aligned}$$

$$5) E[X] = 1,53$$

En moyenne, il y a 1,53 filles sur 3 enfants.

$$6) V(X) = [0^2 \times 0,118 + 1^2 \times 0,367 + 2^2 \times 0,382 + 3^2 \times 0,133] - (1,53)^2$$

$$= 3,092 - 2,3409$$

$$= 0,7511$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,7511} \approx 0,87$$

Exercice 3 :

Dans tout l'exercice, on donnera la valeur exacte des résultats.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est 85 %.

A l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

La chaîne A fabrique le tiers de la production totale.

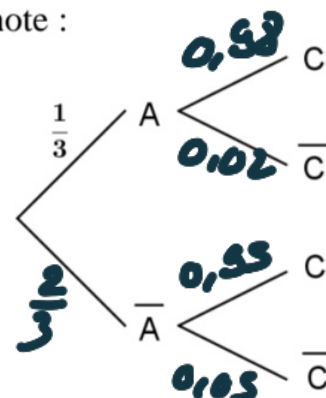
A la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

A l'évènement « la tablette de chocolat provient de la chaîne de production

A » ;

C l'évènement « la tablette de chocolat est commercialisable ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :
 2. Calculer la probabilité que la tablette soit commercialisable et provienne de la chaîne A.
 3. Montrer que la probabilité que la tablette soit commercialisable est 0,96.
4. On considère que la chocolaterie gagne 0,10 euro par tablette commercialisable et perd 0,30 euro par tablette non commercialisable. Soit X la variable aléatoire égale au gain de la chocolaterie par tablette produite.
- a) Déterminer la loi de probabilité de X.
 - b) Peut-on considérer que la chocolaterie perd de l'argent ? Justifier.



$$\begin{aligned} 2) \quad \mathbb{P}(A \cap C) &= \frac{1}{3} \times 0,98 \\ &= 0,33 \end{aligned}$$

3) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap C) \\ &= 0,33 + \frac{2}{3} \times 0,95 \end{aligned}$$

$$= 0,33 + 0,63$$
$$= 0,96$$

4) a) $X(\Omega) = \{0,10; -0,30\}$

$$\cdot P(X=0,10) = 0,96$$

$$\cdot P(X=-0,30) = 0,04$$

b) $E[X] = 0,10 \times 0,96 + (-0,30) \times 0,04$

$$= 0,084$$

En moyenne, il gagne 0,084
euros par balle fabriquée.